А. А. Рывкин, А. З. Рывкин

Математика

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ СТАРШИХ КЛАССОВ
И ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Москва
«ОНИКС 21 век»
«Мир и Образование»
2003

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я2
Р93

Рывкин А. А.

Р93 Математика. Справочное пособие. Для школьников ст. классов и поступающих в вузы / А. А. Рывкин, А. З. Рывкин. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. — 560 с.: ил.

ISBN 5-329-00906-5 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)
ISBN 5-94666-123-X (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Справочник А. А. Рывкина и А. З. Рывкина, выдержавший четыре издания, хорошо известен учащимся и преподавателям средних специальных учебных заведений. В настоящее издание включен материал, предусмотренный школьной программой по математике.

Книга содержит: основные сведения по элементарной математике и примеры решения типовых задач; элементы высшей математики; краткое руководство по простейшему анализу исходных статистических данных; сведения о практике приближенных вычислений и шестизначные математические таблицы.

Пособие адресовано учащимся средних школ, колледжей и абитуриентам.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я2

ISBN 5-329-00906-5
(ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)
ISBN 5-94666-123-X
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Слово к читателю

Перед вами, дорогой читатель, **Справочник**. Это особый вид литературы, предназначенной, главным образом, для самообразования. Он позволяет получить ответы на вопросы: «Что означает данное понятие?», «Зачем оно нужно?», «Как им пользуются?», «В чем суть конкретного вывода теории?», «Чем этот вывод полезен на практике?» К Справочнику обычно обращаются для того, чтобы быстро восстановить забытое или получить сведения, хранить которые в памяти нецелесообразно.

Объем информации, помещаемой в Справочнике, определяется потребностями тех, кому Справочник адресован, и целями, ради достижения которых им могут воспользоваться.

Это — **Справочник по математике**. Он **адресован учащимся средней школы и колледжей,** а также **поступающим в высшие учебные заведения.** Он может быть полезен преподавателям колледжей и читателям, которым необходимо получить дополнительные сведения из разделов математики, помогающие глубже понять основы изучаемых ими дисциплин. Поэтому содержание Справочника шире программы школьного курса математики. Читать Справочник сплошь можно, ибо при его написании выдерживались определенные принципы подбора и изложения материала. Однако делать это не следует. Вы потратите лишнее время на получение информации, которая не требуется при достижении поставленной вами конкретной цели. Выясните сначала, какие сведения вам требуются, а затем проработайте соответствующий раздел Справочника. Делать это нужно с карандашом и бумагой, что поможет вам освоить даже тот материал, с которым вы ранее не встречались. Имеющиеся ссылки и указатель позволят быстро отыскать нужную информацию.

Вместе с тем, данный Справочник отличается от других подобных изданий стремлением помочь читателю кратчайшим путем получить те сведения, которые ему действительно нужны. Поэтому в книге много примеров, раскрывающих приемы решения задач на основе изложенных положений теории. Читателю демонстрируются возникающие трудности и ошибочные ходы; показано, как их следует преодолевать и по возможности избегать.

Этот Справочник может оказаться полезным и читателю, занимающемуся практическими расчетами. Здесь имеются разделы, позволяющие быстро найти нужную числовую информацию. Справочник содержит компактные шестизначные математические таблицы, а это уже точность, достаточная при решении многих прикладных инженерных задач. Есть также раздел, знакомство с которым поможет читателю правильно организовать, содержательно проанализировать и простейшим образом обработать реальный статистический материал.

Работа между авторами распределялась следующим образом. Часть первая, главы 23, 24 и 27 второй части и часть третья написаны А. А. Рывкиным, часть вторая (кроме глав 23, 24 и 27) — А. З. Рывкиным. Электронную версию таблиц подготовил К. А. Рывкин.

Альберт Рывкин

Часть 1

СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

I. Арифметика

1. Натуральные числа. Системы счисления

Действия над натуральными числами. Числа 1, 2, 3, ..., появившиеся в результате счета, называются натуральными. Для них определены следующие арифметические действия:

Таблица I.1

Наименование действия	Пример	Составляющие
Сложение	$31 + 12 = 43$	31 и 12 — слагаемые 43 — сумма
Вычитание — действие, обратное сложению	$43 - 12 = 31$	43 — уменьшаемое 12 — вычитаемое 31 — разность
Умножение	$12 \cdot 5 = 60 =$ $= 12 + 12 + 12 +$ $+ 12 + 12 =$ $= 5 + 5 + 5 + 5 +$ $+ 5 + 5 + 5 + 5 +$ $+ 5 + 5 + 5 + 5 =$ $= 60$	12 и 5 — сомножители 60 — произведение

Продолжение табл.

Наименование действия	Пример	Составляющие
Деление — действие, обратное умножению (деление на нуль невозможно!)	$60 : 12 = 5$ $\frac{60}{12} = 5$	$\begin{cases} 60 \text{ — делимое} \\ 12 \text{ — делитель} \\ 5 \text{ — частное} \end{cases}$
Возведение в степень — умножение одинаковых сомножителей (показатель степени — число сомножителей)	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$	$\begin{cases} 3 \text{ — основание степени} \\ 4 \text{ — показатель степени} \\ 81 \text{ — степень} \end{cases}$
Извлечение корня — действие, обратное возведению в степень	$\sqrt[4]{81} = 3$	$\begin{cases} 81 \text{ — подкоренное число} \\ 4 \text{ — показатель корня} \\ 3 \text{ — корень} \end{cases}$

Действия сложения и умножения обладают свойствами переместительности, сочетательности и распределительности (см. с. 46).

Выражения, по определению не имеющие смысла: $\left[\frac{a}{0}\right]$, где $a \neq 0$ полагают не имеющим смысла, так как результат деления не существует; $\left[\frac{0}{0},\ 0^0\right]$ считают не имеющими смысла, поскольку результат соответствующих действий не может быть определен.

Порядок действий. Скобки. При любой записи действий над числами установлен определенный порядок вычислений. Порядок действий, определенный для арифметических выражений, распространяется и на другие математические выражения.

Основные арифметические действия упорядочены следующим образом: сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление и в последнюю очередь сложение и вычитание.

Несколько действий сложения и вычитания, а также несколько действий умножения и деления выполняются в том порядке, в котором они записаны.

Если хотят, чтобы порядок действий в какой-нибудь записи отличался от установленного, то употребляют скобки.

Математические выражения заключают последовательно в круглые (...), квадратные [...(...)...] и фигурные {..[...(...)...]...} скобки; действия над числами выполняются последовательно: вначале в круглых, затем в квадратных и, наконец, в фигурных скобках.

Пример 1. Вычислить

$$\{[9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + (3^2 - 21 : 7)^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Выполняем действия в круглых скобках:

$$2 \cdot 6 = 12, \quad 3^2 - 21 : 7 = 9 - 3 = 6.$$

Переписываем пример без этих скобок:

$$\{[9 \cdot 4^2 : 12 + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Теперь выполняем действия в квадратных скобках, соблюдая порядок действий:

$$9 \cdot 16 : 12 + 36 + 125 \cdot 8 : 100 = 144 : 12 + 36 + 1000 : 100 =$$
$$= 12 + 36 + 10 = 58.$$

Наконец, выполняем последние действия:

$$58 : 29 \cdot 2 = 4.$$

В записи математических выражений могут употребляться скобки одинаковой конфигурации. В этом случае в первую очередь выполняются действия во внутренних скобках:

$$(((3 + 7) \cdot 2 + (4 - 2) \cdot 5) : 10 + 7) \cdot 5 =$$
$$= ((10 \cdot 2 + 2 \cdot 5) : 10 + 7) \cdot 5 = (30 : 10 + 7) \cdot 5 =$$
$$= (3 + 7) \cdot 5 = 50.$$

Иногда деление обозначают чертой и производят вычисление, предварительно сократив дроби:

$$9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100 =$$

$$= \frac{9 \cdot 4^2}{2 \cdot 6} + 6^2 + \frac{5^3 \cdot 2^3}{100} = 3 \cdot 4 + 36 + 5 \cdot 2 = 58.$$

Деление, обозначенное чертой, выполняют после вычисления выражений, стоящих в числителе и знаменателе.

Знак извлечения корня рассматривается как запись с помощью скобок.

При возведении в степень сначала выполняют действия, указанные в показателе степени:

$$2^{2^5} = 2^{32}.$$

Если требуется указать иной порядок действий, то употребляются скобки:

$$(2^2)^5 = 4^5 = 2^{10}.$$

Десятичная система счисления. Наиболее употребительна запись чисел с помощью *позиционной десятичной системы счисления*. В основании системы лежит число 10. Это означает, что счет ведется *единицами, десятками*, десятками десятков — *сотнями*, десятками сотен — *тысячами* и т.д. Для записи используются десять значков — *цифр*:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Одна и та же цифра имеет разный «вес» в зависимости от места, которое она занимает в записи числа. Так, на первом месте справа она означает число единиц, на втором — число десятков, на третьем — число сотен и т. д. В этом и заключается *позиционность* системы.

При записи число подразделяют на разряды и классы.

Разряд	*Класс*
единиц	единиц
десятков	
сотен	

Разряд	*Класс*
тысяч десятков тысяч сотен тысяч	тысяч
миллионов десятков миллионов сотен миллионов	миллионов

Далее идут классы миллиардов, триллионов и т.д.

В десятичной системе счисления каждое натуральное число может быть записано в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_k$ принимает значения 0, 1, 2, 3, ..., 9. Например,

$$3845 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Системы счисления. Число 10 избрано основанием общеупотребительной системы счисления, поскольку человеку с десятью пальцами на руках оно казалось самым удобным. С математической точки зрения этот выбор случаен. Ничто не мешает рассматривать позиционную систему счисления, в которой основанием служит 2, 3, 7, 12, 17 и вообще любое натуральное число, большее единицы.

В *системе счисления с основанием p* (она называется *p-ичной* — читается «пэ-ичной») будет p цифр, а каждое натуральное число запишется в виде

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0.$$

В *двоичной* системе счисления имеются две цифры: 0 и 1; в *троичной* — три: 0, 1 и 2; в *восьмеричной* — восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; а в *шестнадцатеричной* — шестнадцать. В последнем случае задать обозначения цифр уже труднее. Обычно для десяти первых цифр используют обозначения от 0 до 9, а затем вводят цифры, обозначаемые буквами A, B, C, D, E и G. Воспринимать записанные таким образом числа можно лишь после тренировки. Для облегчения понимания будем обозначать оставшиеся шесть цифр шестнадцатеричной системы счисления соответствующими им числами десятичной системы, заключая их в скобки: (10), (11), (12), (13), (14), (15). Такой способ поддается обобщению и позволяет формулировать общие правила для разных систем счисления.

Главным свойством любой системы счисления является *правило последовательного продвижения в счете*, т. е. правило, позволяющее из записи предыдущего числа получать запись числа, следующего за ним.

Поскольку все p цифр p-ичной системы счисления строго упорядочены и каждая следующая обозначает число на 1 большее, то каждая цифра, кроме нуля, есть продвижение предыдущей. Таким образом, продвижением цифры 0 будет цифра 1, а продвижением цифры $(p-2)$ будет цифра $(p-1)$. Продвижением цифры $(p-1)$ будет число 10_p, имеющее два разряда и записанное двумя цифрами 1 и 0, т.е.

$$10_p = 1 \cdot p^1 + 0 \cdot p^0.$$

Значок p в выражении 10_p означает, что число записано в p-ичной системе счисления.

Теперь правило продвижения можно обобщить для любого числа, записанного в p-ичной системе счисления.

Если число n, записанное в p-ичной системе счисления, оканчивается любой цифрой, кроме цифры $(p-1)$, то *продвижением числа* N будет число (по сути это $N+1$), в котором цифра нулевого разряда числа N заменена на ее продвижение.

Если число N, записанное в p-ичной системе счисления, оканчивается цифрой $(p-1)$, то *продвижением числа* N будет число, в котором цифра разряда единиц есть 0, а цифра разряда десятков есть продвижение цифры разряда десятков числа N.

Продвижением числа $(p-1)(p-1)$, записанного двумя цифрами $(p-1)$ в p-ичной системе счисления, будет число 100_p, продвижением числа $(p-1)(p-1)(p-1)$ будет число 1000_p и т. д.

При переводе целого десятичного числа N в систему счисления с основанием p число N последовательно делят на p до тех пор, пока остаток не станет меньше $p-1$. Число N в системе счисления с основанием p будет получено, если записать подряд все цифры остатков, включая нули, так, чтобы остаток от следующего деления стоял перед остатком, полученным до этого. Цифра 0 появляется, когда деление происходит нацело. Последней ставят цифру частного, если она меньше p (деление этой цифры на p даст в остатке саму эту цифру).

В каждой системе счисления есть своя *таблица сложения* и своя *таблица умножения*. В них сведены правила сложения и умножения цифр. Зная эти правила, можно осуществлять сложение и умножение любых чисел, а также сформулировать алгоритмы для других арифметических действий.

Замечание. Формулировать правила действий для общего случая системы счисления с основанием p громоздко и непрактично.

Двоичная система счисления. Основание — число 2. Для записи используются лишь две цифры: 0 и 1; широкое применение двоичной системы в электронных вычислительных машинах связано с удобством изображения значения каждого разряда с помощью простейшего элемента: 1, когда элемент возбужден (например, по нему идет ток), 0 — в противном случае.

Записать число в двоичной системе счисления — значит представить его в виде суммы степеней числа 2. Для перевода числа из любой системы счисления в двоичную делят данное число на 2 и записывают остаток (0 или1), результат снова делят на 2 и новый остаток записывают слева от первого и т.д. Когда в частном получается 1, то она приписывается слева к последовательности остатков, и эта последовательность превращается в двоичную запись данного числа.

Пример 2. Записать в двоичной системе счисления число 23.

Осуществляя последовательное деление на 2, располагаем результаты справа налево, и записывая остатки по делимым, получаем следующую форму записи:

1	2	5	11	23
1	0	1	1	1

Итак, $23_{10} = 10111_2$.

Пример 3. Записать в двоичной системе счисления число 32 800. Вычисления запишутся в следующем виде:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1025	2050	4100	8200	16 400	32 800
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Итак, $32\ 800_{10} = 1000000000100000_2$.

Для сокращения вычислений и приблизительной оценки числа удобно пользоваться табл. I.2. Получив на некотором этапе число, содержащееся в этой таблице и соответствующее некоторому n, приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам n нулей и единицу.

Таблица I.2

Последовательные степени числа 2

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	10	1 024	20	1 048 576
1	2	11	2 048	21	2 097 152
2	4	12	4 096	22	4 194 304
3	8	13	8 192	23	8 388 608
4	16	14	16 384	24	16 777 216
5	32	15	32 768	25	33 554 432
6	64	16	65 536	26	67 108 864
7	128	17	131 072	27	134 217 728
8	256	18	262 144	28	268 435 456
9	512	19	524 288	29	536 870 912

Значительно упрощает перевод чисел из десятичной системы в двоичную таблица I.3, в которую сведены двоичные представления всех чисел от 64 до 128, т. е. от 2^6 до 2^7. Чтобы найти, например, двоичную запись числа 91, нужно к четырем цифрам, стоящим после черты против этого числа, приписать вместо звездочек первые три цифры из двоичного представления числа 80, возглавляющего столбец. Двоичные записи этих «заглавных» чисел помещены отдельно внизу таблицы и тоже разделены чертой.

Итак, $91_{10} = 1011011_2$. Аналогично, $117_{10} = 1110101_2$.

Таблица I.3

Двоичные представления чисел от 64 до 128 (от 2^6 до 2^7)

Десятичная запись	Двоичная запись		Десятичная запись
64 80	***	0000	96 112
65 81	***	0001	97 113
66 82	***	0010	98 114
67 83	***	0011	99 115
68 84	***	0100	100 116
69 85	***	0101	101 117
70 86	***	0110	102 118
71 87	***	0111	103 119
72 88	***	1000	104 120
73 89	***	1001	105 121
74 90	***	1010	106 122
75 91	***	1011	107 123
76 92	***	1100	108 124
77 93	***	1101	109 125
78 94	***	1110	110 126
79 95	***	1111	111 127
64	100	0000	
80	101	0000	
96	110	0000	
112	111	0000	
128	1000	0000	

Пример 4. Записать в двоичной системе счисления число 65 600, используя табл. I.2.

Осуществляем последовательное деление числа 65 600 на 2 так же, как и в предыдущем примере.

Получив в качестве частного число 512, стоящее в табл. I.2 против цифры 9, мы приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам 9 нулей и единицу:

$$65\ 6000_{10} = 10\ 000\ 000\ 00|1\ 000\ 000_2.$$

Пример 5. Записать в двоичной системе счисления число 7381.

Производим последовательное деление данного числа на 2, пока не получим число, содержащееся в табл. I.3. Затем приписываем слева двоичное представление этого числа:

115	230	461	922	1845	3690	7381
1110011	0	1	0	1	0	1

$$7381_{10} = 1\ 110\ 011\ 010\ 101_2.$$

Для перевода чисел из двоичной системы в десятичную пользуются табл. I.2. При этом поступают, как в следующем примере.

Пример 6. Записать в десятичной системе счисления число $1\ 000\ 111\ 000\ 110\ 101\ 001_2$.

Перенумеровав справа налево (начиная с номера 0) все двоичные разряды данного числа, берем сумму тех степеней двойки, которым соответствуют разряды, содержащие единицу (см. табл. I.2):

$$\underset{18}{1}\,\underset{17}{0}\,\underset{16}{0}\,\underset{15}{0}\ \ \underset{14}{1}\,\underset{13}{1}\,\underset{12}{1}\ \ \underset{11}{0}\,\underset{10}{0}\,\underset{9}{0}\ \ \underset{8}{1}\,\underset{7}{1}\,\underset{6}{0}\ \ \underset{5}{1}\,\underset{4}{0}\,\underset{3}{1}\,\underset{2}{0}\,\underset{1}{0}\,\underset{0}{1} =$$

$$= 2^{18} + 2^{14} + 2^{13} + 2^{12} + 2^{8} + 2^{7} + 2^{5} + 2^{3} + 2^{0} = 291241_{10}.$$

Используя таблицы сложения и умножения для двоичных чисел, можно производить с ними все арифметические действия.

Таблица сложения

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Таблица умножения

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Можно предложить более сложный, но зато и более общий способ перехода от двоичной системы счисления к десятичной, который легко обобщается на случай перехода от любой системы к некоторой заданной.

Действительно, достаточно лишь последовательно делить данное двоичное число на число 10 в двоичной записи: $10_{10} = 1010_2$. Располагая остатки справа налево и переводя их в десятичную систему счисления, получим десятичную запись данного двоичного числа.

Пример 7. Записать в десятичной системе счисления двоичное число $1\,000\,110\,110_2$. Осуществляя приведенную выше схему, получим

```
1000110110 | 1010   |
1010       |--------|
----       | 111000 | 1010
1111         1010   |---------
1010        -----    101 = 5
----         10000
 1010         1010
 1010        -----
 ----------    110 = 6
        110 = 6
```

Итак, $1000\,110\,110_2 = 566_{10}$.

Троичная система счисления. В троичной системе счисления три цифры: 0, 1, 2. Процесс перехода от десятичной системы счисления к троичной аналогичен процессу, рассмотренному для двоичной системы счисления: осуществляются последовательные деления данного числа на 3 и остатки записываются справа налево.

Пример 8. Записать в троичной системе счисления число 2358. Запись удобно вести так же, как и в предыдущем пункте:

1	3	9	29	87	262	786	2358
1	0	0	2	0	1	0	0

$$2358_{10} = 10\,020\,100_3.$$

Для обратного перехода (от троичной записи к десятичной) пользуются табл. I.4.

Таблица I.4

Последовательные степени числа 3

n	3^n	n	3^n	n	3^n
0	1	7	2 187	14	4 782 969
1	3	8	6 561	15	14 348 907
2	9	9	19 683	16	43 046 721
3	27	10	59 049	17	129 140 163
4	81	11	177 147	18	387 420 489
5	243	12	531 441	19	1 162 261 467
6	729	13	1 594 323	20	3 486 784 401

Пример 9. Записать в десятичной системе счисления число $10\,020\,100_3$.

Подписав под каждым разрядом его номер (начиная с нуля подряд справа налево) и воспользовавшись табл. 3, получим

$$\underset{7\,6\,5\,4\,3\,2\,1\,0}{10\,020\,100_3} = 3^7 + 2 \cdot 3^4 + 3^2 = 2358_{10}.$$

Используя таблицы сложения и умножения для троичной системы, можно легко осуществлять в ней все арифметические действия.

Таблица сложения

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Таблица умножения

×	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Восьмеричная система счисления. Основание — число 8. В системе восемь цифр:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

В компьютерах она широко используется при составлении программ, так как перевод из восьмеричной системы в двоичную производится с помощью записи каждой восьмеричной цифры тремя двоичными разрядами:

$$23\,751_8 = 010\ 011\ 111\ 101\ 001_2.$$

Перевод числа из десятичной системы счисления в восьмеричную осуществляется с помощью последовательного деления его на 8.

Все записанные справа налево подряд остатки (включая нули) образуют запись числа в восьмеричной системе.

Пример 10. Записать в восьмеричной системе счисления число 19 432:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 37 & 303 & 2429 & 19\,432 \\ 4 & 5 & 7 & 5 & 0 \end{array}$$

$$19\,432_{10} = 45\,750_8.$$

Обратный переход осуществляется с помощью табл. I.5, являющейся выборкой из табл. I.2.

Таблица I.5

Последовательные степени числа 8

n	8^n	n	8^n
0	1	5	32 768
1	8	6	262 144
2	64	7	2 097 152
3	512	8	16 777 216
4	4 096	9	134 217 728
		10	1 073 741 824

Пример 11. Записать в десятичной системе счисления число $45\,750_8$.

Пользуясь табл. I.5, получим

$$45\,750_8 = 4 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 =$$

43 210

$$= 4 \cdot 4096 + 5 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 5 \cdot 8 = 19\,432_{10}.$$

Используя таблицы сложения и умножения, в восьмеричной системе можно осуществлять все арифметические действия. (Столбцы сложения с 0 и умножения на 0 исключены.)

Таблица сложения

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

Таблица умножения

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Шестнадцатеричная система счисления. Основание — число $16 = 2^4$. В системе шестнадцать цифр:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11), (12), (13), (14), (15).$$

Применяется в компьютерах. Перевод из шестнадцатеричной системы в двоичную очень прост: достаточно каждую цифру шестнадцатеричной системы записать в двоичных кодах посредством четырех двоичных разрядов (см. табл. I.6).

Таблица I.6

Перевод цифр шестнадцатеричной системы счисления в двоичную

0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	(10)	1010
3	0011	(11)	1011
4	0100	(12)	1100
5	0101	(13)	1101
6	0110	(14)	1110
7	0111	(15)	1111

Для цифр шестнадцатеричной системы часто используются обозначения:

$$(10) \to A,\ (11) \to B,\ (12) \to C,\ (13) \to D,$$
$$(14) \to E,\ (15) \to F.$$

Чтобы уверенно работать в таких обозначениях, требуется время для привыкания.

Перевод чисел из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную осуществляется последовательным делением на 16. Остатки (в том числе нули) записывают последовательно начиная с последнего.

Пример 12. Записать число 387_{10} в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

Начнем с восьмеричной системы счисления и осуществим последовательное деление десятичного числа 387 на 8:

$$387 = 48 \cdot 8 + 3,\ \ 48 = 6 \cdot 8 + 0,\ \ 6 = 0 \cdot 8 + 6.$$

Таким образом,

$$387_{10} = 603_8.$$

Запишем каждую из цифр 6, 0 и 3 тремя цифрами двоичного кода:

$$387_{10} = 603_8 = 110\ 000\ 011_2.$$

Сгруппируем двоичные разряды по четыре, начиная с конца, и каждую группу из четырех двоичных разрядов заменим соответствующей цифрой шестнадцатеричной системы, пользуясь при необходимости таблицей I.6:

$$1\ 1000\ 0011_2 = 183_{16}.$$

С помощью таблиц сложения и умножения в шестнадцатеричной системе счисления можно осуществлять арифметические действия.

Самостоятельного значения восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления не имеют. Они полезны в качестве «посредника» между человеком, привыкшим к десятичной системе, и компьютером, для которого естественна двоичная система счисления.

Пример 13. Выполнить умножение в шестнадцатеричной системе счисления: $48_{16} \cdot 12_{16}$.

Поступим следующим образом:

$$48_{16} \cdot 12_{16} = 48_{16}\ (10 + 2)_{16} = 480_{16} + 48_{16} \cdot 2_{16}.$$

Так как $8_{16} \cdot 2_{16} = 10_{16}$, то $48_{16} \cdot 2_{16} = 90_{16}$. Пользуясь таблицей сложения, получим

$$480_{16} + 90_{16} = 510_{16}.$$

Для проверки выполним те же действия в десятичной системе счисления:

$$48_{16} = 4 \cdot 16 + 8 = 72_{10},\ \ 12_{16} = 1 \cdot 16 + 2 = 18_{10},$$

$$72_{10} \cdot 18_{10} = 1296_{10}.$$

Преобразуем теперь 510_{16}:

$$510_{16} = 5 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16 = 16 \cdot 81 = 1296_{10}.$$

Таким образом, действия в шестнадцатеричной системе счисления выполнены правильно.

Пример 14. Выполнить действия:

$$3(12)4_{16} \cdot 13_{16} + 21(15)_{16} \cdot 41_{16}.$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$3(12)4_{16} \cdot 13_{16} = 3(12)40_{16} + 3(12)4_{16} \cdot 3_{16}.$$

Вычислим отдельно $3(12)4_{16} \cdot 3_{16}$, пользуясь таблицей умножения:

$$3(12)4_{16} \cdot 3_{16} = [300 \cdot 3 + (12)0 \cdot 3 + 4 \cdot 3]_{16} =$$
$$= [900 + 240 + (12)]_{16} = (11)4(12)_{16}.$$

Теперь выполним сложение:

$$3(12)40_{16} + (11)4(12)_{16} = 478(12)_{16}.$$

Здесь сложение выполняется поразрядно, и мы воспользовались тем, что $(12) + (11) = 17$. Цифру 7 записываем в третьем разряде, а единицу прибавляем к цифре 3 из четвертого разряда.

Преобразуем второе слагаемое:

$$21(15)_{16} \cdot 41_{16} = 21(15)_{16} \cdot 40 + 21(15)_{16}.$$

Так как $(15) \cdot 4 = 3(12)$, то цифру (12) записываем, а 3 прибавляем к произведению $1 \cdot 4$ следующего разряда, где в итоге получим цифру 7. Поскольку $2 \cdot 4 = 8$, то

$$21(15)_{16} \cdot 41_{16} = 87(12)0_{16} + 21(15)_{16} = 89(13)(15)_{16}.$$

Таблица сложения

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10
2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11
3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12
4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13
5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(10)	11	12	13	14
6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15
7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16
8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17
9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1(10)
(12)	(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1(10)	1(11)
(13)	(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1(10)	1(11)	1(12)
(14)	(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1(10)	1(11)	1(12)	1(13)
(15)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1(10)	1(11)	1(12)	1(13)	1(14)

Остается сложить данные в условии (первое и второе слагаемые):

$$478(12)_{16} + 89(13)(15)_{16}.$$

Из таблицы сложения находим последовательно:

$(12) + (15) = 1(11)$ — цифру (11) пишем, а 1 переносим в следующий разряд,

$8 + (13) + 1 = 9 + (13) = 16$ — цифру 6 пишем, а 1 переносим в следующий разряд,

$7 + 9 + 1 = 8 + 9 = 11$ — цифру 1 пишем, а 1 переносим в следующий разряд,

$4 + 8 + 1 = (13)$.

Окончательно находим число

$$(13)16(11)_{16}.$$

При переводе в десятичную систему получим

$$13 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16 + 11 = 13 \cdot 4096 + 256 + 96 + 11 = 53611.$$

Для проверки выполним те же действия в десятичной системе счисления:

$$3(12)_{16} \cdot 4_{16} = 3 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 4 = 3 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 4 = 964_{10},$$
$$13_{16} = 16 + 3 = 19_{10},$$
$$21(15)_{16} = 2 \cdot 256 + 1 \cdot 16 + 15 = 543_{10},$$
$$41_{16} = 4 \cdot 16 + 1 = 65_{10}.$$

Вычисляя, находим

$$964 \cdot 19 + 543 \cdot 65 = 18316 + 35295 = 53611.$$

Таким образом, все вычисления сделаны верно.

Таблица умножения

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	2	4	6	8	(10)	(12)	(14)	10	12	14	16	18	1(10)	1(12)	1(14)
3	3	6	9	(12)	(15)	12	15	18	1(11)	1(14)	21	24	27	2(10)	2(13)
4	4	8	(12)	10	14	18	1(12)	20	24	28	2(12)	30	34	38	3(12)
5	5	(10)	(15)	14	19	1(14)	23	28	2(13)	32	37	3(12)	41	46	4(11)
6	6	(12)	12	18	1(14)	24	2(10)	30	36	3(12)	42	48	4(14)	54	5(10)
7	7	(14)	15	1(12)	23	2(10)	31	38	3(15)	46	4(13)	54	5(11)	62	69
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	9	12	1(11)	24	2(13)	36	3(15)	48	51	5(10)	63	6(12)	75	7(14)	87
(10)	(10)	14	1(14)	28	32	3(12)	46	50	5(10)	64	6(14)	78	82	8(12)	96
(11)	(11)	16	21	2(12)	37	42	4(13)	58	63	6(14)	79	84	8(15)	9(10)	(10)5
(12)	(12)	18	24	30	3(12)	48	54	60	6(12)	78	84	90	9(12)	(10)8	(11)4
(13)	(13)	1(10)	27	34	41	4(14)	5(11)	68	75	82	8(15)	9(12)	(10)9	(11)6	(12)3
(14)	(14)	1(12)	2(10)	38	46	54	62	70	7(14)	8(12)	9(10)	(10)8	(11)6	(12)4	(13)2
(15)	(15)	1(14)	2(13)	3(12)	4(11)	5(10)	69	78	87	96	(10)5	(11)4	(12)3	(13)2	(14)1

Римские цифры. *Римские цифры* образуют своего рода полупозиционную систему счисления, которая используется для обозначения порядковых числительных (в нумерации томов, иногда частей и глав книг, веков, а иногда и порядкового номера года). В математике применяют римские цифры для обозначения производных порядка большего, чем третий (пишут: y^{IV}, y^{V}, y^{VI} и т. д.).

Система счисления основана на использовании специальных буквенных обозначений для чисел через каждые полпорядка:

$$1 \to \mathrm{I},\ 5 \to \mathrm{V},\ 10 \to \mathrm{X},\ 50 \to \mathrm{L},$$

$$100 \to \mathrm{C},\ 500 \to \mathrm{D},\ 1000 \to \mathrm{M}.$$

Числа 1, 2 и 3 изображаются повторением I, т. е. I, II, III. Число 4 изображается как V − I. Для этого I ставится слева от цифры V, т. е. 4 → IV. Так поступают при образовании и других чисел. Допускаются троекратные повторения слагаемых и однократное вычитание. Если меньшая цифра стоит справа от большей, она прибавляется к ней, а если слева, то вычитается из нее. Вычитание числа, записанного несколькими цифрами, не допускается. Вычитают только цифру того же порядка или предыдущего.

Примеры. Числа до 10 включительно:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X;

десятки до 100 включительно:

X, XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC, C;

сотни до 1000 включительно:

C, CC, CCC, CD, D, DC, DCC, DCCC, CM, M;

отдельные числа:

27 → XXVII, 39 → XXXIX.

Нельзя написать число 40 и вычесть из него 1, т. е. IXL, так как число IX означает 9, 45 → XLV, 89 → LXXXIX, 99 → XCIX (нельзя писать IC; вычитается только цифра ближайшего меньшего порядка), 1999 → MCMXCIX, 2000 → MM.

Делимость чисел. Число a называется *делителем* числа c, если существует такое число b, что $c = ab$ (числа a, b, c — натуральные).

Таблица I.7

Необходимые и достаточные признаки делимости чисел

Делитель	Признак
2	Оканчивается одной из цифр: 0, 2, 4, 6, 8
3	Сумма цифр делится на 3
4	Две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4
5	Последняя цифра 0 или 5
6	Одновременно соблюдаются признаки делимости на 2 и на 3
7	Разность между числом десятков и удвоенной цифрой единиц делится на 7
8	Три последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8
9	Сумма цифр делится на 9
10	Последняя цифра — нуль
11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11

Замечание 1. На 1 делятся все числа.

Замечание 2. Нуль делится на все числа. Несколько подряд стоящих нулей обозначают число нуль (см. признаки делимости на 4 или на 8).

Замечание 3. Числа, делящиеся на 2, называются *четными*, остальные числа — *нечетными*.

Замечание 4. Для делимости на 8 недостаточно одновременного выполнения признаков делимости на 2 и на 4 (сравни признак делимости на 6), так как числа 2 и 4 не являются взаимно простыми.

Простые и составные числа. Общие делители и общие кратные. Натуральное число a называется *простым*, если его делителями являются только единица и само число a. Натуральные числа, имеющие и другие делители, называют *составными*.

Число *единица* рассматривается особо, оно не является ни простым, ни составным.

Простых чисел бесконечно много. Все простые числа до 2803 сведены в табл. IX.7 в конце книги.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ. *Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых чисел и притом единственным образом* (порядок записи сомножителей не учитывается).

Такое представление называется *разложением на простые множители.* Оно производится с использованием признаков делимости.

Приступая к разложению натурального числа на простые множители, следует проверить, не является ли оно простым.

Пример 15. Разложить на простые множители число 1050.

1050	2	Число четное, т. е. делится на 2.
525	3	Сумма цифр равна 12, число делится на 3.
175	5	На 3 число 175 уже не делится; оно делится на 5, так как оканчивается цифрой 5.
35	5	Полученное число еще раз делится на 5.
7	7	
1		

Итак, $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Наибольший общий делитель.

Общим делителем нескольких натуральных чисел называется натуральное число, на которое делится каждое из них. Для любых натуральных чисел общим делителем является единица, т. е. общий делитель всегда существует. Общих делителей у нескольких натуральных чисел не больше, чем делителей у любого из них, следовательно, число общих делителей всегда конечно. Поэтому для любой совокупности натуральных чисел всегда существует *наибольший общий делитель* (НОД).

Если наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел равен единице, то числа называются *взаимно простыми*. Очевидно, что всегда существует и наименьший общий делитель который для любых натуральных чисел равен единице.

Порядок отыскания наибольшего общего делителя.

1-й способ. Каждое из данных натуральных чисел разлагают на простые множители, выписывают множители, входящие в состав каждого из чисел (с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях).

Замечание. Если множитель не входит хотя бы в одно из чисел, то его не включают и в наибольший общий делитель.

Пример 16. Найти наибольший общий делитель чисел 540, 126 и 630.

$$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5;$$
$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7;$$
$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$

наибольший общий делитель равен $2 \cdot 3^2 = 18$.

2-й способ *(способ Евклида)*. Применяется обычно при отыскании наибольшего общего делителя двух чисел. Большее из них делят на меньшее, затем меньшее — на первый остаток, далее первый остаток — на второй, второй — на третий и так до тех пор, пока не получится в остатке нуль; тогда последний делитель будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Пример 17. Найти наибольший общий делитель чисел 357 и 273.

$$\begin{array}{r|l} 357 & 273 \\ \cline{2-2} 273 & 1 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} 273 & 84 \\ \cline{2-2} 252 & 3 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} 84 & 21 \\ \cline{2-2} 84 & 4 \end{array}$$

Последний делитель равен 21. Значит, наибольший общий делитель равен 21.

Наименьшее общее кратное.

Общим кратным нескольких натуральных чисел называется натуральное число, делящееся на каждое из них. Для любых натуральных чисел общим кратным является их произведение. Таким образом, общее кратное существует для любой (конечной) совокупности натуральных чисел. Общих кратных бесконечно много: умножая любое общее кратное последовательно на 2, 3, 4 ..., мы снова получим число, кратное данным числам. Так как общие кратные данных чисел образуют совокупность натуральных чисел, то всегда существует *наименьшее общее кратное* (НОК) для данной совокупности.

Порядок отыскания наименьшего общего кратного.

Каждое из данных натуральных чисел разлагают на простые множители, выписывают все множители какого-нибудь одного из чисел, дописывают все недостающие множители из других чисел и все их перемножают (т. е. каждый множитель берется с наибольшим показателем из встречающихся в разложениях).

Пример 18. Найти наименьшее общее кратное чисел 270, 300, 315.

$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5;$$
$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2;$$
$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$

наименьшее общее кратное равно $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900$.

Множество натуральных чисел. Множество всех натуральных чисел обозначают символом $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Для любых двух натуральных чисел p и q имеет место одно из соотношений: либо $p = q$ (p равно q), либо $p < q$ (p меньше q), либо $p > q$ (p больше q), т. е. множество $\boldsymbol{N}$ *упорядочено*.

Сумма и произведение любых натуральных чисел тоже являются натуральными числами. Вычитание натуральных чисел приводит к натуральному числу лишь при условии, что уменьшаемое больше вычитаемого. Умножение натуральных чисел можно рассматривать как последовательное сложение одинаковых натуральных слагаемых. Деление натуральных чисел можно представить как последовательное вычитание делителя из делимого, из первой полученной разности, из второй и т. д. до тех пор, пока разность либо станет равной делителю, либо будет меньше делителя. В первом случае имеет место деление без остатка, во втором — с остатком. Деление без остатка можно условно рассматривать как деление с остатком, равным нулю. Тогда деление натурального числа m на другое натуральное число n ($m \geqslant n$) с остатком возможно всегда. В результате деления будут найдены такие натуральные числа p и r ($r < n$), что

$$m = pn + r.$$

Натуральное число m, если оно не делится на другое натуральное число n без остатка, дает в остатке одно из чисел: 1, ..., $n - 1$. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ можно разбить на n множеств

$$\boldsymbol{N}_n,\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{N}_{n-1},$$

где $\boldsymbol{N}_n$ — все натуральные числа, делящиеся на n без остатка; $\boldsymbol{N}_1$ — все натуральные числа, которые при делении на n дают в остатке 1, ...; $\boldsymbol{N}_{n-1}$ — все натуральные числа, которые при делении на n дают в остатке $n - 1$. Множества $\boldsymbol{N}_n$, $\boldsymbol{N}_1$, ..., $\boldsymbol{N}_{n-1}$ называют *классами по модулю* n, а представление множества $\boldsymbol{N}$ в виде

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_n \cup \boldsymbol{N}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{N}_{n-1}$$

называют *разбиением на классы по модулю* n.

Множество целых чисел. Дополним множество натуральных чисел новыми элементами: нулем и отрицательными целыми числами. Число *нуль* обозначается символом 0 и по определению обладает свойством $n + 0 = 0$. Любому натуральному числу n ставится в соответствие единственное отрицательное число $-n$ такое, что $n + (-n) = 0$.

Число $-n$ называется *противоположным числу* n. Числа, противоположные натуральным, образуют множество *отрицательных целых чисел*. По аналогии натуральные числа называют *положительными целыми числами*.

Множество всех целых чисел обозначают $\boldsymbol{Z}$.

Имеет место равенство $-(-n) = n$, из которого легко выводятся правила действий с отрицательными числами, справедливые и для действительных чисел:

$$\begin{aligned} m + (-n) &= m - n, \\ m\,(-n) &= -(mn), \\ (-m)\,(-n) &= mn, \\ m : (-n) &= (-m) : n = -(m : n), \\ (-m) : (-n) &= m : n. \end{aligned}$$

При доказательстве удобно сначала предположить, что $m,\ n > 0$, а затем убедиться в том, что это ограничение может быть устранено.

Для каждого целого числа n можно определить:

• его *знак* (обозначается $\operatorname{sign}\, n$), который равен -1, если $n < 0$, 0, если $n = 0$, и 1, если $n > 0$;

• его *модуль* (обозначается $|n|$), который равен n, если $n \geqslant 0$, и равен $-n$, если $n < 0$ (т. е. $|n|$ — неотрицательное число).

Можно записать

$$n = |n| \operatorname{sign}\, n.$$

Такое представление чисел упрощает доказательство многих свойств (подробнее см. с. 46 и далее).

2. Рациональные числа

2.1. Рациональные дроби

Определения. Свойства рациональных дробей. Рациональной дробью называется выражение $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа ($q \neq 0$). Говорят также, что дробь $\frac{p}{q}$ является *простой* или *обыкновенной* дробью (в отличие от десятичной дроби), или *отношением*. Черту в записи рациональной дроби можно воспринимать как знак деления и писать $p : q$ (или p/q). Число, расположенное над чертой, называется *числителем* дроби, а число, расположенное под чертой, — ее *знаменателем*. Доказывая свойства рациональных дробей, а также работая с конкретными числовыми выражениями, удобно сделать знаменатель дроби положительным числом, умножая, если это нужно, ее числитель и знаменатель одновременно на -1.

Свойства положительных рациональных дробей.

1. Если в дроби $\frac{p}{q}$ имеет место соотношение $0 < p < q$, то дробь меньше единицы; если $p = q$, то дробь равна единице; если же $p > q > 0$, то дробь больше единицы.

2. Если числитель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, т. е. умножить (разделить) на натуральное число, то дробь увеличится (уменьшится) во столько же раз.

3. Если знаменатель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, то дробь уменьшится (увеличится) во столько же раз.

4. Из свойств 2 и 3 следует, что дробь не изменится, если числитель и знаменатель одновременно увеличить (уменьшить) в одинаковое число раз.

Деление числителя и знаменателя на общий множитель называется *сокращением дроби*. Умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же число называется *расширением дроби*.

Дробь, числитель которой меньше знаменателя, называется *правильной*. Дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называется *неправильной*. Разделив числитель неправильной дроби на знаменатель, мы можем записать ее в виде *смешанного* числа.

Например, $\frac{59}{11} = 5\frac{4}{11}$.

Дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты, называется *несократимой*.

Сравнение дробей с положительными знаменателями:

Дроби	Если	то
$\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ $(b,\ c > 0)$	$a > 0,\ 0 < b < c$	$0 < \frac{a}{c} < \frac{a}{b}$
	$a < 0,\ 0 < b < c$	$\frac{a}{c} < \frac{a}{b} < 0$
$\frac{d}{f}$, $\frac{e}{f}$ $(f > 0)$	$0 < d < e$	$0 < \frac{d}{f} < \frac{e}{f}$
	$d < e < 0$	$\frac{d}{f} < \frac{e}{f} < 0$

Если знаменатель дроби отрицателен, то ее числитель и знаменатель предварительно умножают на -1, а затем сравнивают дроби с положительными знаменателями.

Для сравнения дробей с разными числителями и знаменателями их предварительно приводят к общему знаменателю. *Наименьшим общим знаменателем* нескольких дробей называется наименьшее общее кратное их знаменателей.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, находим наименьшее общее кратное знаменателей дробей и берем его в качестве знаменателя каждой данной дроби. Числитель каждой дроби увеличиваем во столько раз, во сколько раз ее знаменатель меньше наименьшего общего знаменателя.

Например, для дробей $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{33}$ наименьший общий знаменатель будет $11 \cdot 9 = 99$:

$$\frac{2}{11} = \frac{18}{99}; \quad \frac{2}{9} = \frac{22}{99}; \quad \frac{1}{33} = \frac{3}{99}$$

и поэтому

$$\frac{1}{33} < \frac{2}{11} < \frac{2}{9}.$$

Действия с дробями:

Наименование действия	Выполнение действия	Пример
Сложение	Приводят дроби к общему знаменателю и складывают полученные числители, подписывая под ним общий знаменатель	$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{13}{20}=$ $=\frac{40+12+39}{60}=1\frac{31}{60}$
Вычитание	Приводят дроби к общему знаменателю, после чего из числителя уменьшаемого вычитают числитель вычитаемого	$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7-6}{8}=\frac{1}{8}$
Умножение	Перемножают отдельно числители дробей и отдельно их знаменатели (произведя предварительно сокращение дробей); первое произведение будет числителем результата, второе — его знаменателем	$\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}=\frac{5\cdot3\cdot6}{3\cdot4\cdot7}=$ $=\frac{3\cdot5}{2\cdot7}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$
Деление	Заменяют умножением на дробь, обратную* делителю	$\frac{3}{7}:\frac{9}{14}=\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{9}=\frac{2}{3}$
* Поменяв в дроби числитель и знаменатель, получим дробь, называемую *обратной* по отношению к данной.		

Замечание 1. Чтобы сложить смешанные числа, находят отдельно сумму их целых частей и сумму их дробных частей, например:

$$2\frac{3}{4}+7\frac{4}{7}=(2+7)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{7}\right)=10\frac{9}{28}.$$

Замечание 2. В случае, когда дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, в уменьшаемом «занимается» единица и превращается в неправильную дробь, например:

$$3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}=3\frac{2}{6}-2\frac{3}{6}=2\frac{8}{6}-2\frac{3}{6}=\frac{5}{6}.$$

Замечание 3. Если в умножении или делении участвуют смешанные числа, то их предварительно обращают в неправильные дроби.

Таблица I.8

Типы задач на действия с дробями

Тип задачи	Решение	Пример
1. Отыскание целого числа по заданной величине его части	Разделить величину части числа на дробь, выражающую его часть	Найти число, $\frac{3}{4}$ которого равно 750. $750 : \frac{3}{4} = 750 \cdot \frac{4}{3} = 1000.$
2. Отыскание части числа по его целому	Умножить число на дробь, выражающую его часть	Имея 36 р., школьник $\frac{1}{6}$ истратил на тетради. Какова истраченная сумма? $36 \text{ р.} \cdot \frac{1}{6} = 6 \text{ р.}$
3. Отыскание части числа в долях целого	Разделить величину части числа на целое	Цех выпустил 5000 деталей; из них 20 бракованных. Какую часть составляет брак? $20 : 5000 = \frac{1}{250}$

Пропорции. Пропорцией называется равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \qquad (1)$$

Например: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ или $2 : 3 = 8 : 12$.

Члены a и d пропорции (1) называются *крайними*, b и c — *средними*.

Каждый член пропорции называется четвертым пропорциональным по отношению к остальным трем.

Свойства пропорций.

Если задана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a : b = c : d,$$

то:

1) $ad = bc$, т. е. произведение ее крайних членов равно произведению средних;

2) $a = \frac{bc}{d}$, $d = \frac{bc}{a}$, т. е. каждый ее крайний член равен произведению средних, деленному на другой крайний член;

3) $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, т. е. каждый ее средний член равен произведению крайних, деленному на другой средний член;

4) одновременно справедливы пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

т. е. в каждой пропорции можно менять местами или только средние члены, или только крайние, или и те и другие одновременно.

Производные пропорции.

Если задана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

то справедливо соотношение

$$\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd}, \qquad (2)$$

называемое *производной пропорцией*, где m, n, p и q — такие, что $pa + qb \neq 0$.

Частные случаи производной пропорции:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}, \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

получаются из пропорции (2) при некоторых значениях коэффициентов m, n, p, q.

Особые виды пропорций.

Непрерывная пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

— пропорция с двумя равными средними или с двумя равными крайними членами. Для *непрерывной* пропорции

$$b^2 = ac.$$

Гармоническая пропорция

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}, \text{ т. е. } 1 - \frac{b}{a} = \frac{c}{d} - 1.$$

Непрерывная гармоническая пропорция

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{a}{b}, \text{ т. е. } 1 - \frac{b}{a} = \frac{c}{b} - 1.$$

Из равенства нескольких отношений

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

следует:

1) $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \dfrac{a_1}{b_1}$;

2) $\dfrac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n}{b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_n m_n} = \dfrac{a_1}{b_1}$,

где m_1, m_2, ..., m_n — любые величины, не обращающие знаменатель в нуль.

2.2. Десятичные дроби. Проценты. Двоичные дроби

Определение десятичной дроби. *Десятичная дробь* — частный случай обыкновенной дроби. Знаменатель десятичной дроби есть натуральная степень числа 10. Десятичную дробь записывают в одну строку, отделяя в ней запятой столько цифр, сколько нулей в знаменателе:

$$\frac{38543}{100} = 385{,}43; \quad 49\frac{72}{1000} = 49{,}072.$$

Так как мы пользуемся десятичной системой счисления, то десятичные дроби приобретают особое значение.

Правила действий над целыми числами без существенных изменений переносятся на десятичные дроби.

Действия над десятичными дробями:

Название действия	Правило	Пример
Сложение и вычитание	Аналогично сложению и вычитанию целых чисел. Необходимо следить за тем, чтобы соответствующие разряды и десятичные доли были записаны строго один под другим	$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 418{,}471 \\ 31{,}19 \end{array} \\ \hline 449{,}661 \end{array}$ $\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 536{,}14 \\ 79{,}472 \end{array} \\ \hline 456{,}668 \end{array}$
Умножение	Дроби умножают как целые числа, затем в произведении справа отделяют запятой столько цифр, сколько в сумме десятичных знаков во всех сомножителях	$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 4{,}09 \\ 0{,}024 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 1636 \\ 818 \end{array} \\ \hline 0{,}09816 \end{array}$
Деление десятичной дроби на целое число	Делят как целые числа. Перед тем, как внести в остаток первую цифру после запятой, ставят в частном запятую и далее продолжают деление, как обычно	$\begin{array}{r\|l} -417{,}96 & 86 \\ \cline{2-2} 344\phantom{{,}96} & 4{,}86 \\ \cline{1-1} -739 & \\ 688 & \\ \cline{1-1} 516 & \\ 516 & \\ \cline{1-1} \end{array}$

Замечание 1. От переноса запятой вправо (влево) на n знаков десятичная дробь увеличивается (уменьшается) в 10^n раз.

Замечание 2. Если делимое меньше делителя, то в частном пишут нуль и ставят после него запятую. Затем к делимому приписывают справа нуль (т. е. увеличивают его в десять раз). Если после этого оно все еще остается меньше делителя, то в частном после запятой снова пишут нуль, а в делимом приписывают справа еще один нуль. Так поступают до тех пор, пока делимое не станет больше делителя. Дальше деление производят обычным образом.

Замечание 3. Если делитель есть десятичная дробь, то следует отбросить запятую в делителе, а в делимом перенести запятую вправо на столько знаков, сколько было в делителе после запятой. Дальше поступают по правилу деления десятичной дроби на целое число.

Обращение десятичной дроби в простую и простой в десятичную. Чтобы обратить десятичную дробь в простую, следует число, стоящее после запятой, написать в числителе, а в знаменателе написать 10^k, где k — число цифр справа от запятой (считая нули перед первой значащей цифрой).

Например, $18{,}5104 = 18\dfrac{5104}{10^4} = 18\dfrac{5104}{10\,000} = 18\dfrac{319}{625}$.

Чтобы простую дробь обратить в десятичную, числитель простой дроби делят на ее знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

Пример 1. Дробь $\dfrac{36}{25}$ обратить в десятичную. Вычисляем:

$$\begin{array}{r|l} -36 & 25 \\ \underline{25} & 1{,}44 \\ -110 & \\ \underline{100} & \\ -100 & \\ \underline{100} & \end{array}$$

Пример 2. Дробь $\dfrac{11}{18}$ обратить в десятичную. Вычисляем:

$$\begin{array}{r|l} -110 & 18 \\ \underline{108} & 0{,}611 \\ -20 & \\ \underline{18} & \\ -20 & \\ \underline{18} & \\ 2\ldots & \end{array}$$

При обращении простой дроби в десятичную может образоваться *бесконечная десятичная дробь*.

Периодические дроби. Бесконечная десятичная дробь, которая, начиная с некоторого разряда, образуется последовательным приписыванием справа одного и того же числа, называется *периодической*, а повторяющееся число — ее *периодом*.

Примеры:

$0{,}333\ldots;\ 3{,}5555\ldots;\ 1{,}6111\ldots;\ 2{,}18313131\ldots$

В первых двух из них повторение начинается с первой цифры после запятой — такая дробь называется *чистой периодической*. В третьей дроби сначала идет цифра 6, а затем бесконечно повторяется 1, в четвертой повторение (период 31) начинается после 18. Периодические дроби, в которых повторение начинается не сразу после запятой, называются *смешанными периодическими*.

При записи периодических дробей период заключают в скобки: 0,(3); 3,(5); 1,6(1); 2,18(31).

Обыкновенную конечную десятичную дробь можно считать периодической с периодом, равным 0 или 9: 3,168(0) = 3,167(9). Принимая это во внимание, можно доказать, что любая обыкновенная дробь обращается в периодическую десятичную дробь.

Возможно и обратное преобразование: любую периодическую дробь можно обратить в простую. Здесь приходится рассматривать два случая.

С л у ч а й 1. *Обращение чистой периодической дроби в простую.* В качестве числителя простой дроби берут период чистой периодической дроби; в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например, $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $1,(18) = 1\frac{18}{99} = 1\frac{2}{11}$.

С л у ч а й 2. *Обращение смешанной периодической дроби в простую.* Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в простую, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.

Например, $1,31(12) = 1\frac{3112-31}{9900} = 1\frac{3081}{9900} = 1\frac{1027}{3300}$.

Второе правило легко следует из первого. Действительно, достаточно умножить смешанную периодическую дробь на 10^k, где k — число цифр после запятой до периода. Полученную чистую периодическую дробь нужно обратить по первому правилу и разделить результат на 10^k.

Например:

1) $0,2(1) = \frac{1}{10} \cdot 2,(1) = \frac{1}{10} \cdot 2\frac{1}{9} = \frac{2}{10} + \frac{1}{90} = \frac{19}{90}$,

аналогично $0,2(1) = \frac{21-2}{90} = \frac{19}{90}$;

2) $1,31(12) = \frac{1}{100} \cdot 131,(12) = \frac{1}{100} \cdot 131\frac{12}{99} =$

$= 1 + \frac{31}{100} + \frac{12}{9900} = 1\frac{31 \cdot 99 + 12}{9900} = 1\frac{1027}{3300}$,

аналогично

$1,31(12) = 1\frac{3112-31}{9900} = 1\frac{3081}{9900} = 1\frac{1027}{3300}$.

Мы видим, что любую простую дробь можно обратить в периодическую и, обратно, каждую периодическую дробь можно обратить в простую.

Проценты. *Процент* — сотая часть числа. Обозначение — %. Если число принято за единицу, то 1% его составляет 0,01 этого числа, 25% составляют 0,25, или 1/4 этого числа и т. д.

Выражение величины a в процентах другой величины b, т. е.

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\%,$$

называется *процентным отношением* чисел a и b.

Если величина a составляет p% величины b, то

$$a = \frac{bp}{100}, \quad b = \frac{100a}{p}.$$

Промилле — тысячная часть числа; обозначается ‰.

Типы задач на проценты.

Они аналогичны типам задач на простые дроби.

1. Отыскание всего числа по заданной величине его процента.

2. Отыскание указанного процента от данного числа.

3. Отыскание процентного отношения двух чисел.

Сложные проценты.

Рассмотрим одну из наиболее типичных задач на проценты.

В сберегательную кассу внесен вклад в a рублей и положен на p процентов годовых (т. е. проценты начисляются один раз в год). Какова будет сумма денег через n лет?

Через один год на сберегательной книжке будет

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ р.};$$

через два года

$$\left[a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{р.}$$

Нетрудно убедиться, что через n лет сумма составит

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ р.}$$

Это и есть ***формула сложных процентов***. Здесь проценты насчитываются на проценты и поэтому называются *сложными*.

Двоичные дроби. В двоичной системе счисления роль десятичных дробей выполняют двоичные дроби. Правила действий с ними легко можно установить, используя правила действий с десятичными дробями и таблицы сложения и умножения для двоичных чисел.

Перевод двоичной дроби в десятичную.

Под каждым разрядом снизу подписывается его порядок и берется сумма степеней двойки, соответствующих тем разрядам, в которых стоит единица:

$$\underset{10}{1}\,\underset{9}{0}\,\underset{8}{0}\,\underset{7}{1}\,\underset{6}{1}\,\underset{5}{0}\,\underset{4}{1}\,\underset{3}{0}\,\underset{2}{0}\,\underset{1}{1}\,\underset{0}{1},\quad \underset{-1}{0}\;\underset{-2}{1}\;\underset{-3}{1}\;\underset{-4}{0}\;\underset{-5}{1}{}_2 =$$

$$= 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} =$$

$$= 1235{,}40625_{10}.$$

При вычислениях полезно наряду с табл. I.2 пользоваться табл. I.9.

Перевод десятичной дроби в двоичную (табл. I.9)

Таблица I.9

Отрицательные степени числа 2

n	2^n	n	2^n
−1	0,5	−11	0,00048828125
−2	0,25	−12	0,000244140625
−3	0,125	−13	0,0001220703125
−4	0,0625	−14	0,00006103515625
−5	0,03125	−15	0,000030517578125
−6	0,015625	−16	0,0000152587890625
−7	0,0078125	−17	0,00000762939453125
−8	0,00390625	−18	0,000003814697265625
−9	0,001953125	−19	0,0000019073486328125
−10	0,0009765625	−20	0,00000095367431640625

Пример 3. Записать в двоичной системе счисления число 1235,40625.

Сначала записываем в двоичной системе целую часть данного числа (см. с. 11—14):

$$1235 = 10\ 011\ 010\ 011.$$

Затем переводим в двоичную дробь число 0,40625. Осуществляется это с помощью последовательного вычитания из 0,40625 отрицательных степеней двойки, начиная с 0,5. Если вычитание осуществимо, то после запятой ставим единицу, если нет — нуль. Из остатка вычитаем следующую дробь из данной таблицы и т. д. Процесс продолжается либо до тех пор, пока мы не исчерпаем данную дробь, т. е. пока в остатке не получим нули, либо до получения необходимой точности.

Запись ведется по следующей схеме:

$$\begin{array}{rrl}
 & 0{,}40625 & \\
(n=-2) & -\ 0{,}25 & \\
\hline
 & 0{,}15625 & \\
(n=-3) & -\ 0{,}125 & \quad \boxed{0{,}01101} \\
\hline
 & 0{,}03125 & \\
(n=-5) & -\ 0{,}03125 & \\
\hline
\end{array}$$

Итак, $1235{,}40625_{10} = 10\ 011\ 010\ 011,\ 011\ 01_2$.

Восьмеричные и шестнадцатеричные дроби. Переход от двоичных дробей к восьмеричным осуществляется путем объединения двоичных разрядов по три от запятой влево и вправо. После этого каждая тройка двоичных разрядов заменяется соответствующей цифрой восьмеричной системы счисления:

$$000 \to 0,\quad 001 \to 1,\quad 010 \to 2,\quad 011 \to 3,$$
$$100 \to 4,\quad 101 \to 5,\quad 110 \to 6,\quad 111 \to 7.$$

Обратный перевод осуществляется аналогично. Чтобы осуществить перевод двоичной дроби в шестнадцатеричную, поступают так же, как и при переводе в восьмеричную дробь, с той лишь разницей, что группируют двоичные разряды от запятой влево и вправо по четыре и пользуются таблицей I.6.

Пример 4. Записать в восьмеричной системе счисления двоичное число

$$100\ 11000\ 110\ 101,100\ 010\ 110\ 011\ 01_2.$$

Объединим двоичные разряды по три от запятой влево и вправо (недостающие нули удобнее дописать):

$$(010)\ (011)\ (000)\ (110)\ (101),\ (100)\ (010)\ (110)\ (011)\ (010).$$

Теперь заменив на цифры восьмеричной системы, получим

$$23065{,}42532_8.$$

Пример 5. Записать двоичное число из примера 1 в шестнадцатеричной системе счисления.

Объединим двоичные разряды по четыре от запятой влево и вправо (недостающие нули допишем):

$$(0010)\ (0110)\ (0011)\ (0101),\ (1000)\ (1011)\ (0011)\ (0100).$$

Воспользуемся таблицей I.6 и получим

$$2635{,}8(11)34_{16}.$$

Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных дробей в десятичные осуществляется так же, как и перевод двоичных дробей. При этом из таблицы I.9 выбирают отрицательные степени чисел 8 и 16 соответственно. Для восьмеричных дробей — это отрицательные степени числа 2, кратные 3, а для шестнадцатеричных дробей — отрицательные степени числа 2, кратные 4. При таком переводе придется выполнить довольно громоздкие вычисления.

Множество рациональных чисел. Каждая конечная десятичная дробь (в том числе и любое целое число) может быть записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби с периодом, отличным от нуля:

$$0{,}7 = 0{,}6(9);\ \ 4 = 3{,}(9);\ \ -6{,}579 = -6{,}578(9).$$

Удобно определять *рациональное число* как бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом, отличным от нуля.

Часто определяют рациональное число как множество равных (точнее, эквивалентных) рациональных дробей. В этом случае приходится из множества рациональных дробей, соответствующих данному рациональному числу, выбирать одну, как бы определяющую это число.

Обычно выбирают рациональную дробь с положительным знаменателем, у которой модуль числителя и знаменатель — взаимно простые числа:

$$\frac{-1}{3} \sim \left\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{-3}, \frac{2}{-6}, \frac{-3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}.$$

Все рациональные числа образуют множество рациональных чисел, которое обозначается символом $\boldsymbol{R}$. Множество $\boldsymbol{R}$ содержит в качестве своего подмножества множество целых чисел, а следовательно, и множество натуральных чисел. Сумма, разность, произведение и частное (деление на нуль невозможно) рациональных чисел также являются рациональными числами.

II. Алгебра

3. Расширение понятия о числе

3.1. Действительные числа

В арифметике были введены рациональные числа и изучены их свойства. В процессе развития алгебры и математического анализа понятие числа пришлось значительно расширить.

Числовая ось. *Числовой осью* называется прямая, на которой заданы две точки — *нуль* и *единица*. Предположим, что нуль лежит левее единицы, а направление от нуля к единице отметим стрелкой (рис. 1). Расстояние между нулем и единицей называется *единицей масштаба* или *масштабным расстоянием*.

Отложив на числовой оси вправо от единицы отрезок, равный единице масштаба, получим точку, соответствующую числу 2; продолжая этот процесс, сможем каждому натуральному числу поставить в соответствие точку числовой оси (рис. 2).

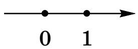


Рис. 1

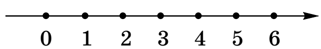


Рис. 2

Для каждой точки, соответствующей числу n, построим на оси точку, симметричную относительно нуля, и обозначим ее через $-n$ (рис. 3). Числа, соответствующие построенным точкам, образуют совокупность целых *отрицательных чисел,* для которых можно сохранить все правила действий с положительными числами. При этом нужно иметь в виду свойства, указанные в табл. II.1.

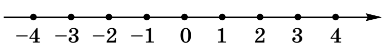


Рис. 3

Теперь с помощью деления отрезка между нулем и единицей на равные части (см. задачу 7 п. 12.1) легко построить точки, соответствующие числам вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые, $0 < p < q$. Все остальные рациональные точки можно построить сдвигом (вправо или влево) на целое число единиц масштаба.

Иррациональные числа. В результате проведенного построения вся числовая ось оказывается настолько густо покрытой рациональными точками, что как бы мал ни был отрезок оси, в нем всегда окажется бесконечно много рациональных точек. Тем не менее на числовой оси можно указать точки, не являющиеся рациональными. Например, точка, отстоящая от нуля на расстояние, равное диагонали квадрата со стороной единица (рис. 4), не может быть рациональной.

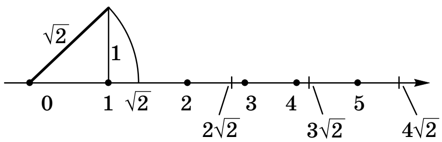


Рис. 4

Действительно, если предположить, что $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа, то $p^2 = 2q^2$. Из записи следует, что p четно, а значит, p^2 делится на четыре. Тогда и q четно, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$. Следовательно, $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде несократимой рациональной дроби, в то время как любая рациональная дробь допускает такое представление. Поэтому $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Расстояние между числами 0 и $\sqrt{2}$ можно, как и единицу масштаба, разделить на любое число равных частей (см. задачу 7 п. 12.1) и получить точку для каждого числа $\sqrt{2}\,\frac{p}{q}$. Итак, одно нерациональное число $\sqrt{2}$

порождает столько же новых нерациональных чисел, сколько рациональных имеется в нашем распоряжении.

Любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной *периодической* десятичной дроби и, обратно, любая бесконечная десятичная *периодическая дробь* может быть записана в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые. Чтобы обеспечить однозначность в записи, можно, например, условиться писать 1,(9) вместо 2,(0); 0,34(9) вместо 0,35(0) и т. д.

Число, которое можно выразить в форме бесконечной десятичной *непериодической* дроби, называют *иррациональным*.

Рациональные и иррациональные числа в совокупности называются *действительными* или *вещественными*.

Можно доказать, что каждому действительному числу соответствует только одна точка числовой оси, а каждой точке числовой оси соответствует только одно действительное число.

Таким образом, каждое действительное число можно изобразить в виде только ему соответствующей точки числовой оси. В этом и заключается *геометрическое представление* действительных чисел.

Алгебраические и трансцендентные числа. Действительные числа подразделяются также на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраическими называют числа, которые являются корнями алгебраических многочленов с целыми коэффициентами. Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $4\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt{6}}$ — алгебраические числа.

Неалгебраические числа называют *трансцендентными*.

Так как каждое рациональное число $\frac{p}{q}$ является корнем соответствующего многочлена первой степени с целыми коэффициентами $qx - p$, то оно алгебраическое, а все трансцендентные числа иррациональны. Доказать, что некоторое число трансцендентно, далеко не просто.

Трансцендентными являются числа e, π, синусы многих рациональных величин, логарифмы целых чисел и т.д.

Действия над действительными числами. Над действительными числами выполняются четыре арифметических действия, свойства которых сведены в таблицу II.1.

Таблица II.1

Формула		Название свойства
для сложения	для умножения	
$a + b = b + a$	$ab = ba$	1. *Переместительность (коммутативность)*
$(a + b) + c =$ $= a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$	2. *Сочетательность (ассоциативность)*
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$ $a \cdot 1 = a$	3. *Свойства нуля и единицы*
$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = \frac{a}{a} = 1$ $(a \neq 0)$	4. Существование *противоположного* числа (возможность *вычитания*) и *обратного* числа (возможность *деления*)
	$(a + b)c = ac + bc$	5. *Распределительность (дистрибутивность)*
$-(-a) = a$ $a + (-b) = a - b$ $a - (-b) = a + b$	$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b =$ $= -(ab);$ $(-a) \cdot (-b) = ab;$ $a \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = a : (-b) =$ $= (-a) : b =$ $= (-a) \cdot \frac{1}{b} = -\frac{a}{b}$	6. Свойства действий с отрицательными числами

Модуль действительного числа. *Модулем* действительного числа a называется само это число, если оно неотрицательно, и это число, взятое с противоположным знаком, если оно отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Наряду с $|a|$ рассматривают функцию sign a (знак числа a):

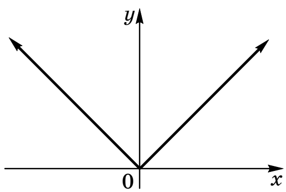
$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -1, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

При всех a имеют место равенства:

$$a = |a| \operatorname{sign} a,$$

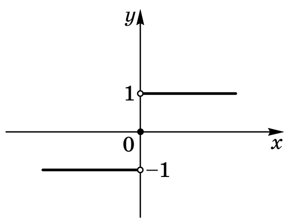
$$|a| = a \operatorname{sign} a.$$

На рис. 5 и 6 изображены графики функций $y = |x|$, $y = \operatorname{sign} x$.



$y = |x|$

Рис. 5



$y = \operatorname{sign} x$

Рис. 6

Примечание. О преобразовании графика функций $y = f(x)$ в графики $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$ см. § 24.

Модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Модуль произведения (*частного*) равен произведению (частному) модулей сомножителей (делимого и делителя):

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|; \ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0).$$

Геометрический смысл модуля числа a — расстояние на числовой оси от начала отчета до точки, изображающей число a.

Понятие модуля тесно связано с понятием арифметического корня (см. п. 4.1).

Часто приходится решать уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком модуля. Решение таких уравнений поясним на примерах.

Пример 1. Решить уравнение

$$|x+1|+|x-2|+|2x-5|=4.$$

Чтобы решить такое уравнение, нужно раскрыть знаки модуля, а сделать это можно, лишь зная, отрицательны или неотрицательны стоящие под этими знаками величины. Поэтому поступают следующим образом: наносят на числовую прямую все те точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, меняют знак. В нашем примере это точки $x=-1$, $x=2$, $x=2{,}5$ (рис. 7). Ими числовая прямая разбивается на столько частей, сколько нам предстоит разобрать случаев. В примере таких частей четыре. Рассмотрим их последовательно, двигаясь по числовой оси слева направо.

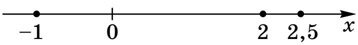


Рис. 7

Пусть $x<-1$, тогда каждая из величин $x+1$, $x-2$ и $2x-5$ отрицательна. Поэтому данное уравнение можно записать так:

$$-(x+1)-(x-2)-(2x-5)=4.$$

Раскрыв скобки, найдем

$$x=0{,}5,$$

что не согласуется с предположением $x<-1$. Следовательно, при $x<-1$ уравнение не имеет решений.

Пусть $-1\leqslant x<2$. Тогда величина $x+1$ неотрицательна, а величины $x-2$ и $2x-5$ отрицательны. Данное уравнение примет вид

$$(x+1)-(x-2)-(2x-5)=4,$$

откуда $x=2$. Это снова не согласуется с предположением, что $-1\leqslant x<2$, и в этом промежутке решений нет.

Если $2\leqslant x\leqslant 2{,}5$, то уравнение примет вид

$$(x+1)+(x-2)-(2x-5)=4,$$

т.е.

$$4=4.$$

Так как уравнение обратилось в тождество, то любое значение из рассматриваемого промежутка является решением уравнения.

Пусть, наконец, $x>2{,}5$. Тогда все величины, стоящие под знаками модулей, положительны:

$$(x+1)+(x-2)+(2x-5)=4,$$

т.е.

$$x=2{,}5 \text{ и решений снова нет.}$$

Итак, решением данного уравнения будет отрезок

$$2\leqslant x\leqslant 2{,}5.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=3.$$

Воспользовавшись тем, что $\sqrt{a^2} = |a|$ (см. § 4), перепишем это уравнение в виде

$$|x - 1| + |x - 2| = 3.$$

Точки $x = 1$ и $x = 2$ делят числовую прямую на три части, в каждой из которых мы и решаем уравнение.

При $x < 1$ уравнение примет вид

$$-(x - 1) - (x - 2) = 3,\ x = 0, \text{ что } < 1.$$

Если $1 \leqslant x \leqslant 2$, то получим

$$(x - 1) - (x - 2) = 3, \text{ т. е. } 1 = 3, \text{ решений нет.}$$

Когда $x > 2$, уравнение запишется так:

$$(x - 1) + (x - 2) = 3, \text{ откуда } x = 3, \text{ что } > 2.$$

Итак, уравнение имеет два корня:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

3.2. Комплексные числа

Определения. Действия с комплексными числами. Следующий этап расширения понятия о числе — введение комплексных чисел. Необходимость такого расширения понятия о числе возникает хотя бы потому, что действие извлечения корня из действительного числа не всегда возможно в области действительных чисел. В самом деле, например, нельзя указать такое действительное число, квадрат которого равен отрицательному числу.

Комплексными называются числа вида $a + bi$ (где a и b — действительные числа*), если они обладают следующими свойствами:

1. Равенство двух комплексных чисел

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$$

возможно тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

---

* a — *действительная часть* комплексного числа; b — его *мнимая часть.*

Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных (при $b = 0$).

Комплексные числа $a + bi$ при $b \neq 0$ называются *мнимыми*, числа вида bi называются *чисто мнимыми.*

2. Сложение двух комплексных чисел осуществляется по правилу

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

3. Умножение двух комплексных чисел осуществляется по правилу

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

(т.е. по обычному правилу умножения многочленов с обязательной заменой i^2 числом -1).

Укажем два важных следствия из первого и третьего свойств.

Следствие 1. $a_1 + b_1 i = 0$ тогда и только тогда, когда

$$a_1 = b_1 = 0.$$

Следствие 2. Из правила умножения комплексных чисел вытекает, что

$$i^2 = -1.$$

Таким образом,

$$i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ i^6 = -1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ i^{4k} = 1,\ \ i^{4k+1} = i,\ \ i^{4k+2} = -1,\ \ i^{4k+3} = -i.$$

Комплексные числа обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для сложения и умножения (см. табл. II.1.).

Для комплексных чисел понятия «больше» или «меньше» не определены.

Для каждого комплексного числа $a + bi$ существует *противоположное* ему число

$$-(a + bi) = -a - bi.$$

Отсюда получаем *правило вычитания комплексных чисел*:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Числа вида

$$a + bi \text{ и } a - bi,$$

отличающиеся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными*. Они обладают следующими свойствами:

1. Сумма и произведение двух комплексно-сопряженных чисел есть всегда *число действительное*:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a; \qquad (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2. Деление комплексно-сопряженных чисел

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

при $a_2 + b_2 i \neq 0$ *всегда возможно* и осуществляется с помощью умножения делимого и делителя на число, комплексно-сопряженное делителю:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Примеры:

1) $(3 - 2i) + (1 + i) = (3 + 1) + (-2 + 1)\, i = 4 - i$;
2) $(3 - i) - (3 + 2i) = (3 - 3) + (-1 - 2)\, i = -3i$;
3) $(6 + 2i)(3 - 4i) = (18 + 8) + (6 - 24)\, i = 26 - 18i$;
4) $\dfrac{3 - i}{1 + i} = \dfrac{(3 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{(3 - 1) + (-1 - 3)i}{1 + 1} = 1 - 2i$;
5) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i \cdot i} = \dfrac{i}{-1} = -i$;
6) $\dfrac{1}{a + bi} = \dfrac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i.$

Геометрическое истолкование. Расположив на плоскости две пересекающиеся под прямым углом числовые оси с общим масштабом, мы получим наиболее удобное геометрическое истолкование комплексных чисел: каждому комплексному числу $a + bi$ соответствует одна точка (a, b) комплексной плоскости с координатами a и b или же вектор (a, b) и, обратно, каждой точке (a, b) плоскости соответствует одно комплексное число $a + bi$ (рис. 8). Гори-

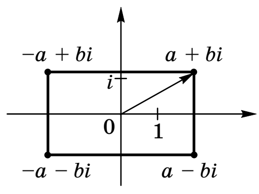


Рис. 8

зонтальная ось называется *действительной*, вертикальная — *мнимой*. Комплексно-сопряженные числа симметричны относительно действительной оси, противоположные числа симметричны относительно нуля.

Сложение и вычитание комплексных чисел можно истолковать как сложение и вычитание соответствующих векторов (см. гл. 23). На рис. 9 и 10 показаны геометрические построения соответственно суммы и разности комплексных чисел.

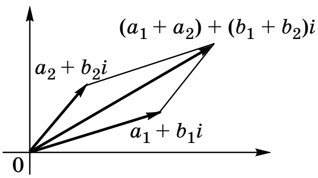


Рис. 9

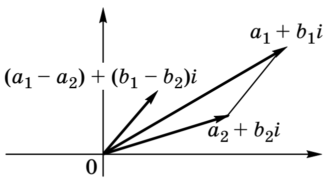


Рис. 10

Тригонометрическая форма. Комплексное число $a + bi \neq 0$ может быть записано в виде

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

называемом *тригонометрической формой* комплексного числа.

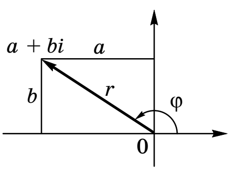


Рис. 11

Здесь r — расстояние от начала координат до заданной точки $(a,\ b)$, а φ — угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против часовой стрелки действительную ось, чтобы она проходила через точку $(a,\ b)$ (рис. 11). Положительное число r называется *модулем* комплексного числа $a + bi$, число φ — его *аргументом*.

Обозначения:

$$r = |a + bi| = \mathrm{mod}\,(a + bi), \quad \varphi = \arg(a + bi).$$

Модулем действительного числа является его абсолютная величина.

Если на аргумент комплексного числа наложено ограничение $-\pi \leqslant \varphi < \pi$ (или $0 \leqslant \varphi < \pi$), то говорят, что φ есть *главное значение* аргумента.

Переход от алгебраической формы $a + bi$ комплексного числа к его тригонометрической форме (φ — главный аргумент) осуществляется по формулам:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

откуда

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, \text{ если } a > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a = 0,\ b > 0, \\ \operatorname{arcrtg} \dfrac{b}{a} + \pi, \text{ если } a < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a = 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Комплексные числа z с одним и тем же модулем r (т. е. для которых $|z| = r$) образуют на комплексной плоскости окружность радиуса r с центром в начале координат (рис. 12, *а*). Комплексные числа z с одним и тем же

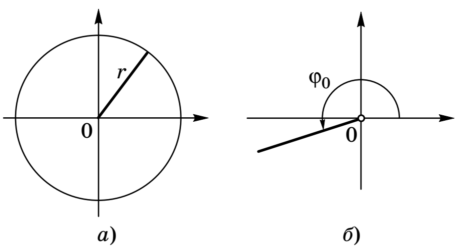


Рис. 12

аргументом φ_0 образуют луч, выходящий из не принадлежащего лучу начала координат под углом φ_0 к действительной полуоси (рис. 12, *б*).

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня значительно проще производить над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Умножение:

$$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

(модули перемножают, а аргументы складывают).

Деление:

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$(r_2 \neq 0)$$

(первый модуль делят на второй, из первого аргумента вычитают второй).

Возведение в степень (целую положительную) производят по ***формуле Муавра***:

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

(модуль возводят в ту же степень, а аргумент умножают на показатель степени).

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right);$$

при этом коэффициенту k придают последовательно n значений: $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и получают n значений корня, т. е. ровно столько, каков показатель корня.

Пример 3:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16(\cos 0 + i \sin 0)} = 2\sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Получаем четыре значения корня:

$$2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i\,0) = 2;$$

$$2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i) = 2i;$$

$$2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Они располагаются на действительной и мнимой осях на расстоянии в две единицы масштаба от начала координат (рис. 13, *а*).

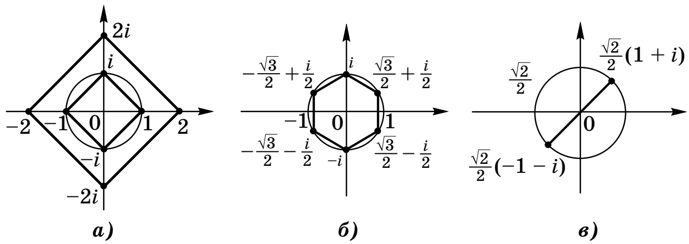


Рис. 13

Пример 4:

$$\sqrt[6]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6},$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5.$$

Получаем шесть значений корня (рис. 13, *б*):

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \quad i, \quad \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i),$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i), \quad -i, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Пример 5:

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right),\ k = 0,\ 1.$$

Получаем два значения корня (рис. 13, *в*):

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i); \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i).$$

Замечание. Комплексные числа в программу средней школы не входят. Однако их использование позволяет упростить важные теоремы алгебры. Мы приводим этот материал для справки.

4. Алгебраические выражения

4.1. Степени и корни

Определения. *Степень* действительного числа a с натуральным показателем n есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ \ldots,\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}.$$

Действительным корнем n-й степени (n — натуральное, $n \geqslant 2$) из действительного числа b называется такое действительное число x, что $x^n = b$.

Обозначение: $x = \sqrt[n]{b}$.

Математически определение корня можно записать так:

$$(\sqrt[n]{b})^n = b.$$

Неотрицательный корень n-й степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*. Можно доказать, что арифметический корень любой натуральной степени из любого положительного числа существует.

Замечание. В элементарной математике выражение $\sqrt[n]{a}$ понимают как арифметический корень, т. е. сама запись $\sqrt[n]{a}$ предполагает, что $a \geqslant 0$. (Иногда допускают употребление знака корня, если a отрицательно, а n нечетно. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$.) Таким образом,

$$\sqrt{4} = 2, \text{ но } \sqrt{4} \neq -2, \text{ хотя } (-2)^2 = 4;$$

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Вообще,

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $\sqrt{(-2)^2} = 2$, а не -2.

Принимаются следующие определения:

1. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.
2. Выражение 0^0 смысла не имеет.
3. Если $a > 0$, а числа m и n — натуральные, то

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}.$$

Замечание. Дробные показатели определены только для положительных оснований. Поэтому например, выражение $(-27)^{1/3}$ не имеет смысла.

Примеры:

1) $a^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}}$ $(a > 0)$;

2) $(-5)^{\frac{7}{2}}$, $(-8)^{-\frac{1}{2}}$ — не имеют смысла в области действительных чисел;

3) $\left(a^{\frac{3}{7}}\right)^{-\frac{21}{2}} = a^{-\frac{3\cdot 21}{7\cdot 2}} = a^{-\frac{9}{2}}$ $(a > 0)$.

Если $a > 0$, то a^ρ, где ρ — иррациональное число, можно определить как предел a^{p_k} (p_k — рациональные числа) при $p_k \to \rho$.

Действия со степенями. Для степеней с положительными основаниями справедливы следующие соотношения:

$a^{\rho_1}a^{\rho_2} = a^{\rho_1+\rho_2}$ $a^{\rho_1} : a^{\rho_2} = a^{\rho_1-\rho_2}$	—	при умножении (делении) степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются (вычитаются), а основание сохраняется;
$(a^{\rho_1})^{\rho_2} = a^{\rho_1\rho_2}$	—	при возведении в степень показатели степени перемножаются, а основание сохраняется;
$(ab\ \ldots\ l)^\rho = a^\rho b^\rho \ldots l^\rho$	—	степень произведения сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей;
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^\rho = \dfrac{a^\rho}{b^\rho}$	—	степень частного равна частному степеней делимого и делителя.

Из приведенных формул следуют подобные соотношения для *арифметических корней*:

$\sqrt[\rho]{ab\ldots l} = \sqrt[\rho]{a}\,\sqrt[\rho]{b}\ldots\sqrt[\rho]{l}$ — арифметический корень из произведения сомножителей равен произведению арифметических корней из этих же сомножителей ($a, b, \ldots, l \geqslant 0$);

$\sqrt[\rho]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[\rho]{a}}{\sqrt[\rho]{b}}$ — арифметический корень из частного равен частному арифметических корней из делимого и делителя ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$);

$\sqrt[\rho]{a} = \sqrt[\rho k]{a^k}$ — подкоренное число $a \geqslant 0$ можно возвести в любую степень k, а показатель корня умножить на показатель этой степени, — значение арифметического корня от этого не изменится.

Замечание. Если рассматривать не только арифметические корни, то приведенные выше формулы приводят к абсурдным соотношениям.

Например:

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = (\sqrt{-2})^{-2} = -2;$$

$$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{9^2}} = \sqrt{\left(\frac{-4}{9}\right)^2} = -\frac{4}{9};$$

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Вынесение множителя из-под радикала. Если a и b — неотрицательные числа, то

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

Эта формула применяется как слева направо, так и справа налево. При использовании ее нужно помнить, что для любых n она верна лишь при неотрицательных

a и b, а при нечетных n формула верна для любых действительных a и b. Поэтому нельзя писать, например,

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b},$$

а следует писать

$$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b},$$

т. е.

$$\sqrt{a^2 b} = \begin{cases} a\sqrt{b}, & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a\sqrt{b}, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Исключение иррациональности в дроби.

Случай 1. В знаменателе стоит радикал $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}}$. Умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt[n]{a^{n-1}} = \dfrac{a}{\sqrt[n]{a}}$, получим $\dfrac{A\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.

Случай 2. В знаменателе стоит алгебраическая сумма, причем, по крайней мере, одно из слагаемых — радикал второй степени:

а) $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; в) $\dfrac{A}{a+\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{A}{a-\sqrt{b}}$.

В этих случаях умножаем числитель и знаменатель на соответствующие сопряженные выражения:

а) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; б) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; в) $a - \sqrt{b}$; г) $a + \sqrt{b}$.

Если число слагаемых в знаменателе больше двух, то исключение иррациональности производится последовательно:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{A}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}} =$$

$$= \frac{A[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}} = \frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

Пример 1. Преобразовать выражение $\dfrac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

Умножив числитель и знаменатель на $2-\sqrt{4-x^2}$, получим

$$\frac{x^3(2-\sqrt{4-x^2})}{(2+\sqrt{4-x^2})(2-\sqrt{4-x^2})}=\frac{x^3(2-\sqrt{4-x^2})}{x^2}=x(2-\sqrt{4-x^2}).$$

Пример 2. Преобразовать выражение $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{2}-1$, получим

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1}=3-2\sqrt{2}.$$

При вычислении пределов приходится умножать на сопряженное выражение и числитель дроби, а иногда числитель и знаменатель одновременно.

Пример 3. Вычислить $\lim\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$.

Умножив числитель и знаменатель на $(3+\sqrt{x^2-7})(2+\sqrt{8+x})$, получим

$$\lim_{x\to-4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}=\lim_{x\to-4}\left(\frac{3^2-(x^2-7)}{2^2-(8+x)}\cdot\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-4}\left(-\frac{16-x^2}{4+x}\,\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-4}\left((x-4)\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=-\frac{32}{6}=-\frac{16}{3}.$$

Формула сложного радикала:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+m}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-m}{2}},$$

где $m=\sqrt{A^2-B}$ $(A>0,\ B>0,\ A^2>B)$.

Знаки в правой и левой частях равенства выбирают соответственно.

Пример 4. Преобразовать выражение $\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$.

По формуле сложного радикала получим

$$\sqrt{9-\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-17}}{2}} - \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-17}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{9+8} - \sqrt{9-8}) = \frac{1}{2}(\sqrt{34} - \sqrt{2});$$

$$\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{34} - \sqrt{2}).$$

4.2. Многочлены

Определения. Действия над многочленами. *Одночленом* относительно данных букв называется произведение, составленное из числового множителя (*коэффициента*) и одной или нескольких из этих букв, взятых в натуральной или нулевой степени.

Например, $7ab^2c^5$; $\frac{7}{5}x^3z$; $-5cz^2n$; $-b$; 6,8; $\sqrt{2}\,ax^5$.

Замечание. Числа также причисляются к одночленам. В элементарной алгебре обычно рассматриваются любые действительные коэффициенты.

Многочленом (или *целым* алгебраическим выражением) относительно данных букв называется алгебраическая сумма нескольких одночленов относительно этих букв. Каждый из входящих в многочлен одночленов называется *членом многочлена*.

Одночлен можно рассматривать как частный случай многочлена, состоящего из одного члена. Многочлен, составленный из двух или трех членов, называется соответственно *двучленом* или *трехчленом*.

Члены многочлена, либо равные, либо отличающиеся только коэффициентами, называются *подобными*.

Приведением подобных членов называется замена нескольких подобных членов одним, коэффициент которого равен алгебраической сумме их коэффициентов.

Приведем пример:

$$\underline{x^2} - \underline{\underline{4xy}} + \underline{\underline{\underline{3a^2}}} + \underline{\underline{8xy}} - \underline{\underline{\underline{5a^2}}} - \underline{x^2} - 2yz =$$
$$= 4xy - 2a^2 - 2yz.$$

Будем в дальнейшем рассматривать лишь многочлены вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

где n — натуральное число, называемое *степенью многочлена*.

Сложение многочленов — образование нового многочлена, включающего все одночлены складываемых многочленов.

Чтобы *вычесть многочлен из многочлена*, надо к членам уменьшаемого прибавить члены вычитаемого, взятые с противоположными знаками.

При *умножении* (*делении*) *многочлена на одночлен* следует каждый член многочлена умножить (разделить) на этот одночлен и результаты сложить. Например,

$$(x^2 + 2x - 3)\, ax = ax^3 + 2ax^2 - 3ax.$$

Произведение многочленов определяется как сумма произведений одного многочлена на каждый одночлен другого. Например,

$$(x^2 + x + a)(bx + c) = (x^2 + x + a)\, bx + (x^2 + x + a)c =$$
$$= bx^3 + bx^2 + abx + cx^2 + cx + ac =$$
$$= bx^3 + (b + c)x^2 + (ab + c)x + ac.$$

Формулы сокращенного умножения и деления.

$$\left.\begin{array}{l} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{array}\right\} \text{квадрат суммы;}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \end{array}\right\} \text{квадрат разности;}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{— куб суммы;}$$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ — разность квадратов;

$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$ — произведение двучленов;

$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ — преобразование произведения;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов;

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$ — сумма четвертых степеней;

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \\ a^4 - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) \end{array}\right\}$$ разность четвертых степеней;

$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.

Деление многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ — значит найти многочлены $M(x)$ (частное) и $N(x)$ (остаток) такие, что при всех x

$$P(x) = M(x)\,Q(x) + N(x),$$

причем степень многочлена $N(x)$ ниже степени $Q(x)$.

Пример 5. Разделить многочлен $P(x) = 8x^4 - 3x^2 + 6x + 4$ на многочлен $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} 8x^4 \qquad\quad - 3x^2 + 6x + 4 \\ \underline{8x^4 + 12x^3 + 4x^2} \end{array} & \begin{array}{|l} 2x^2 + 3x + 1 \\ \hline 4x^2 - 6x + \frac{11}{2} \end{array} \\
-\begin{array}{l} -12x^3 - 7x^2 + 6x \\ \underline{-12x^3 - 18x^2 - 6x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 11x^2 + 12x + 4 \\ \underline{11x^2 + \frac{33}{2}x + \frac{11}{2}} \end{array} & \\
-\frac{9}{2}x - \frac{3}{2} &
\end{array}$$

Итак,

$$M(x) = 4x^2 - 6x + \frac{11}{2}; \quad N(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(3x + 1).$$

Часто приходится делить многочлен на двучлен $x - a$. В этом случае удобно пользоваться схемой сокращенного деления (***схемой Горнера***).

Пусть требуется разделить многочлен

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

на $x - \alpha$. Составляем таблицу коэффициентов при x, располагая их в порядке убывания степеней (если некоторые степени отсутствуют, то за соответствующий коэффициент принимаем нуль):

α	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_0
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$	…	$N = a_0 + \alpha b_0$

В левом столбце таблицы записываем значение α из заданного двучлена. Нижнюю строку таблицы заполняем по следующему правилу: значение первого коэффициента переписываем — оно равно значению a_n данного многочлена; в каждой следующей клетке записываем число, равное сумме коэффициента, стоящего над ним, и произведения коэффициента α на число, находящееся в соседней слева клетке. В n первых клетках мы получаем коэффициенты частного, расположенные в порядке убывания степеней x; в $(n + 1)$-й клетке получаем остаток от деления.

Пример 6. Найти $(2x^4 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2)$.

Здесь $a = -2$. Составляем таблицу:

−2	2	0	3	1	−5
	2	−4	11	−21	37

Таким образом, мы получим частное $2x^3 - 4x^2 + 11\ x - 21$ и остаток 37:

$$2x^4 + 3x^2 + x - 5 = (2x^3 - 4x^2 + 11x - 21)\ (x + 2) + 37.$$

Остаток от деления многочлена на двучлен можно найти не производя деления, пользуясь теоремой Безу.

ТЕОРЕМА БЕЗУ. *Многочлен*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

при делении на $x - \alpha$ *дает остаток, равный значению многочлена при* $x = \alpha$.

Пример 7. Не производя деления

$$(2x^4 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2)$$

найти остаток.

Подставляя в делимое $x = -2$, найдем:

$$2 \cdot (-2)^4 + 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 37.$$

Кстати, мы убедились в том, что в вычислениях предыдущего примера не допущена ошибка.

Разложение многочлена на множители. Если многочлен

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

удается представить в виде произведения других многочленов, то говорят, что данный многочлен разложен на множители.

Если при $x = \alpha$ многочлен обращается в нуль, то число α называют *корнем* этого многочлена. Каждый многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0\ (a_n \neq 0)$ может быть представлен в виде

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – комплексные корни многочлена; $k_1, k_2, \dots, k_r$ — кратности корней, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

Число α_i является корнем кратности k_i многочлена $P(x)$.

Если комплексное число $a + bi$ является корнем многочлена с *действительными* коэффициентами, то корнем этого многочлена обязательно будет и число $a - bi$, комплексно-сопряженное с первым.

Отсюда следует, что каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k)(x^2 + p_1 x + q_1)\ldots(x^2 + p_i x + q_i),$$

где α_i, p_i, q_i — действительные числа. (Среди множителей могут встретиться одинаковые.)

Приведем примеры:

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$;

2) $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 3) =$

$$= (2x + 1)(3x - 2)(x + 3);$$

3) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x + 1)^2(x^2 + 2)$.

В первом и втором примерах все корни имеют кратность, равную единице. В третьем примере $x = -1$ — корень кратности, равной двум.

Приемы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение за скобки. Если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобки. Например,

$$7a(x + 2) + 4ab(x + 2) = a(x + 2)(7 + 4b).$$

2. Способ группировки. Члены многочлена соединяют в группы, имеющие одинаковые множители. Например,

$$12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) =$$
$$= 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) =$$
$$= (3 - x)(2 - x)(2 + x).$$

3. Иногда полезно ввести *вспомогательные члены* или *разложить* какой-либо член на подобные слагаемые. Например,

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$$
$$= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

Условие равенства многочленов. Восстановление многочлена по его корням. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Это свойство положено в основу ***метода неопределенных коэффициентов*** (см. также с. 71).

Если дан многочлен с неизвестными коэффициентами, то каждый корень этого многочлена позволяет получить линейное уравнение, связывающее коэффициенты.

Пример 8. У многочлена $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3$ есть двукратный корень -1 и корень 2. Найти a, b, c.

Решим пример двумя способами.

Способ 1. Обозначим неизвестный корень многочлена через α. Тогда

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = (x - 2)(x + 1)^2(x - \alpha),$$

т. е.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = x^4 - \alpha x^3 - 3x^2 + (3\alpha - 2)\, x + 2\alpha.$$

Воспользовавшись условием равенства двух многочленов, получим

$$a = -\alpha, \quad b = -3, \quad c = 3\alpha - 2, \quad 3 = 2\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad a = -\frac{3}{2}, \quad b = -3, \quad c = \frac{5}{2}.$$

Способ 2. Подставляя $x = 2$ и $x = -1$, получим два уравнения:

$$8a + 4b + 2c + 19 = 0,$$

$$-a + b - c + 4 = 0.$$

Так как -1 — двукратный корень, то данный многочлен можно дважды последовательно разделить на $x + 1$. После первого деления, которое можно выполнить углом или по схеме Горнера, получим частное

$$x^3 + (a - 1)\, x^2 + (b - a + 1)\, x + (c - b + a - 1).$$

Корнем найденного в частном многочлена снова является $x = -1$. Таким образом, запишем третье уравнение

$$3a - 2b + c - 4 = 0.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + 19 = 0, \\ -a + b - c + 4 = 0, \\ 3a - 2b + c - 4 = 0, \end{cases}$$

находим

$$a = -\frac{3}{2}, \; b = -3, \; c = \frac{5}{2}.$$

Симметрические многочлены. Многочлен от x и y называется *симметрическим*, если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Например, многочлены $x^2 + y^2$, $x^2y + xy^2$, $x^2 + xy + y^2$ — симметрические; многочлены $x - y$, $x^2 - y$ не являются симметрическими.

Простейшие симметрические многочлены: $x + y$ и xy. Для них вводят специальные обозначения:

$$x + y = u,\ xy = v.$$

Имеет место следующая **ТЕОРЕМА:** *любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от u и v.*

Чтобы научиться находить такое представление для любого симметрического многочлена от x и y, достаточно выразить через простейшие многочлены u и v выражения вида $s_n = x^n + y^n$:

$$s_1 = x + y = u,$$
$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$
$$s_3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) =$$
$$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = u(u^2 - 3v).$$

Составим выражение

$$us_{k-1} = (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}).$$

Раскрыв скобки, найдем

$$us_{k-1} = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + vs_{k-2}.$$

В результате получено простое соотношение

$$s_k = us_{k-1} - vs_{k-2},$$

которое позволяет последовательно вычислить s_n:

$$s_4 = us_3 - vs_2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

$$s_5 = us_4 - vs_3 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$$

и т. д.

4.3. Алгебраические дроби

Определение. Свойства. Выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где в числителе и знаменателе стоят многочлены, называется *алгебраической дробью.*

Алгебраическая дробь удовлетворяет всем свойствам обыкновенной дроби, ее можно сокращать и расширять (умножать числитель и знаменатель на одно и то же выражение); две алгебраические дроби можно сравнивать и т.д.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общие корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то алгебраическую дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно сократить на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)$. Если $P(x)$ разделится на $Q(x)$ без остатка, мы получим целое алгебраическое выражение.

Если рассматривать только дроби, в которых уже произведено сокращение, то о дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно сказать, что она принимает числовые значения при всех x, для которых $Q(x) \neq 0$.

Когда знаменатель дроби обращается в нуль, дробь не имеет смысла.

Замечание. Вообще говоря, сокращение дроби на $x - a$ возможно лишь при $x \neq a$, так как делить на нуль нельзя. Мы не оговариваем это специально и рассматриваем в качестве значения дроби лишь $\lim\limits_{x \to 0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, который равен числу, если кратность корня a для $P(x)$ не меньше кратности корня a для $Q(x)$, и бесконечности в противном случае.

Действия с алгебраическими дробями.

Сложение и вычитание.

1. Если знаменатели складываемых или вычитаемых дробей не имеют общих множителей, то поступают так:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) \pm P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)},$$

т.е. за общий знаменатель принимают произведение данных знаменателей.

2. Если знаменатели имеют общий множитель $r(x)$, т. е. могут быть представлены в виде

$$Q_1(x) = r(x)q_1(x), \quad Q_2(x) = r(x)q_2(x),$$

то

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{1}{r(x)}\left(\frac{P_1(x)}{q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{q_2(x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{r(x)} \frac{P_1(x)q_2(x) \pm P_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}.$$

3. Когда разложение знаменателей на множители слишком трудоемко, то поступают так же, как и в первом случае.

Замечание 1. Во всех случаях после выполнения действий можно попытаться сократить дробь, полученную в результате.

Замечание 2. Вместо разложения знаменателей на множители можно найти их наибольший общий делитель по схеме Евклида. При этом в качестве первого делимого берется знаменатель с большей степенью (при равных степенях выбирается любой). Если на некотором этапе деления в остатке появится постоянная, то $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ не имеют общих целых делителей, отличных от константы.

Умножение и деление:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)};$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)P_2(x)}.$$

Перед тем как почленно перемножить многочлены в числителе и знаменателе, нужно, если это возможно, сократить полученные дроби. При решении некоторых задач сокращение не производят, а выносят общие множители в числителе и знаменателе за скобки.

Разложение на простейшие дроби. Часто бывает удобно представить алгебраическую дробь в виде суммы дробей с простейшими действительными знаменателями. Так как знаменатель может быть разложен в произведение множителей первой и второй степеней, уже не разложимых дальше, то рассмотрим на конкретных примерах четыре возможных случая.

Разложение осуществляется с помощью **метода неопределенных коэффициентов.**

Случай 1. В разложение знаменателя алгебраической дроби входят только множители первой степени и ни один из них не повторяется.

Пример 9. Алгебраическую дробь $\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}$ разложить на простейшие.

Так как $x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$, то попытаемся разложить данную дробь на простейшие вида

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}, \qquad (1)$$

где постоянные A, B, C и D найдем с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Приведем правую часть равенства (1) к общему знаменателю и приравняем числители в правой и левой частях:

$$x^2 - x + 2 = A(x - 1)(x + 2)(x - 2) +$$
$$+ B(x + 1)(x + 2)(x - 2) + C(x + 1)(x - 1)(x - 2) +$$
$$+ D(x + 1)(x - 1)(x + 2). \qquad (2)$$

Равенство (2) справедливо при любых значениях x, т.е. должно выполняться тождественно. Поэтому мы выбираем столько значений x, сколько у нас имеется неизвестных коэффициентов, и из (2) получим уравнения (в данном случае их четыре) для определения A, B, C, D:

$$\begin{array}{r|l}
x = -1 & 4 = A(-2)(+1)(-3) + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 0, \text{ откуда } A = \frac{2}{3}; \\
x = 1 & 2 = A\cdot 0 + B\cdot 2\cdot 3\cdot(-1) + C\cdot 0 + D\cdot 0, \text{ откуда } B = -\frac{1}{3}; \\
x = -2 & 8 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot(-1)(-3)(-4) + D\cdot 0, \text{ откуда } C = -\frac{2}{3}; \\
x = 2 & 4 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 3\cdot 1\cdot 4, \text{ откуда } D = \frac{1}{3}.
\end{array}$$

Значения $x = -1, 1, -2, 2$ выбраны потому, что они обращают в нуль максимальное число членов в правой части (2) и приводят поэтому к наиболее простым уравнениям.

Мы получили следующее разложение:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Случай 2. В разложение знаменателя входят только множители первой степени и некоторые из них повторяются. В этом случае в правой части берутся слагаемые, содержащие последовательные степени линейных множителей знаменателя от первой до показателя кратности включительно.

Пример 10. Алгебраическую дробь $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$ разложить на простейшие.

Так как знаменатель дроби содержит двукратный множитель $x + 2$, то этому множителю будет соответствовать столько членов в правой части, какова его кратность (в данном случае два члена):

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \tag{3}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$x^2 = A(x + 2)^2 + B_1(x + 1)(x + 2) + B_2(x + 1).$$

Давая x значения -1, -2, 0, получим соответственно уравнения:

$$\begin{array}{l|ll} x = -1 & 1 = A, & \\ x = -2 & 4 = -B_2, & \text{откуда } B_2 = -4. \\ x = 0 & 0 = 4A + 2B_1 + B_2, & \text{откуда } B_1 = 0. \end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Случай 3. В разложение знаменателя алгебраической дроби входят множители второй степени (не разложимые на вещественные множители первой степени) и ни один из них не повторяется. В правой части берется сумма дробей, знаменатель каждой из которых является натуральной степенью неразложимого далее в области вещественных чисел выражения. При этом степеням линейных выражений соответствуют постоянные числители (A, B, C), а степеням неразложимых квадратных трехчленов — линейные числители $Lx + M$.

Пример 11. Алгебраическую дробь $\dfrac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}$ разложить на простейшие.

Найдем разложение в виде

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$x^3+4x^2+6 = A_1(x+1)(x^2+2) + A_2(x^2+2) + (Bx+C)(x+1)^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = A_1 + B, \\ x^2 & 4 = A_1 + A_2 + 2B + C, \\ x^1 & 0 = 2A_1 + B + 2C, \\ x^0 & 6 = 2A_1 + 2A_2 + C. \end{array}$$

Решая эту систему четырех уравнений, найдем

$$A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = 3, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = -\frac{2}{3},$$

т. е.

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

Заметим, что приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях здесь удобнее, чем выбор определенных значений x, так как лишь $x = 1$ позволяет получить удобное уравнение; при остальных значениях x ни один член в правой части не обратится в нуль.

Случай 4. Те же условия, что и в случае 3, только множители второй степени могут повторяться. Речь идет о том, что в разложение знаменателя входят множители вида $(ax^2 + bx + c)^n$. В этом случае каждому множителю будут соответствовать n слагаемых в правой части:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Пример 12. Алгебраическую дробь $\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$ разложить на простейшие.

Правая часть разложения должна иметь вид

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1x+C_1}{1+x^2} + \frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$3x + 1 = A(1 + x^2)^2 + (B_1x + C_1)\, x\, (1 + x^2) + (B_2x + C_2)x.$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A + B_1 = 0, \\ x^3 & C_1 = 0, \\ x^2 & 2A + B_1 + B_2 = 0, \\ x^1 & C_1 + C_2 = 3, \\ x^0 & A = 1, \end{array}$$

решая которую найдем:

$$A = 1,\ B_1 = -1,\ C_1 = 0,\ B_2 = -1,\ C_2 = 3.$$

Итак, мы получили разложение

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2}.$$

5. Уравнения

5.1. Общие сведения

Равенство. Тождество. Уравнение. Два математических выражения (числовые или буквенные), соединенные знаком «=», образуют *равенство*.

Равенство может быть либо *верным* (истинным), либо *неверным* (ложным):

$$5 = 5, \quad 10 : 5 = 2, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$ — верные равенства;

$$3 = 1, \quad a^2 + b^2 = -7$$ — неверные равенства.

Если написано любое числовое равенство, то оно всегда будет либо истинным (верным), либо ложным (неверным). Верное числовое равенство называется *числовым* *тождеством*. Про буквенное (символическое) равенство не всегда можно определенно сказать, верно оно или нет. При одних значениях входящих в него букв оно может быть верным, при других — неверным.

Может случиться, что при некоторых значениях букв одно из выражений, соединенных знаком равенства, или оба эти выражения не имеют смысла. Тогда само равенство считается неверным.

Например, равенство $\frac{a}{b+1} = 3b$ верно при $b = 1$ и $a = 6$, неверно при $b = 1$ и $a = 5$, а также при $b = -1$ и любом a.

Множество значений букв, при которых обе части равенства существуют, называется *областью существования* равенства или *областью допустимых значений* входящих в него букв.

Тождеством называется равенство, справедливое при всех значениях входящих в него букв, при которых обе его части существуют.

Таким образом, тождество при подстановке вместо входящих в него букв их значений может обратиться либо в верное числовое равенство, либо в равенство, не имеющее смысла.

П р и м е р ы:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$;

3) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$;

4) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Тождества 1) и 2) верны при всех значениях входящих в них букв. Тождество 3) становится неверным при $a = b$: левая часть его не существует, а правая существует. Тождества 4) и 5) теряют смысл при $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Однако у тождества 5) при этих значениях α перестают существовать обе части, в то время как у тождества 4) — только правая часть.

Приведенному определению тождества удовлетворяет и равенство $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$, область допустимых значений которого — единственная точка $x = 0$, а в ней значения левой и правой частей равны.

Разобранные примеры показывают, что понятие тождества не содержит в себе утверждения об эквивалентности его правой и левой частей.

Применить тождество — значит заменить в некотором равенстве выражение, стоящее в левой части тождества, выражением, стоящим в правой его части. В результате применения тождества к равенству область допустимых значений входящих в равенство букв может сузиться, расшириться или остаться без изменения. Например, тождества 1), 2) и 5) оставляют область допустимых значений входящих в равенство букв без изменения, тождество 3) расширяет область значений, а тождество 4) сужает. В более сложных случаях область допустимых значений входящих в равенство букв может измениться более существенно: некоторые значения будут приобретены, а некоторые потеряны.

Целесообразно выделить тождества, применение которых не изменяет области допустимых значений входящих в равенство букв. Это будут тождества, в которых левая и правая части либо всегда существуют, либо перестают существовать одновременно. Такие тождества будем называть *абсолютными*. В приведенных выше примерах абсолютными являются тождества 1), 2) и 5).

Если в равенстве некоторые буквы объявлены *неизвестными* и поставлена задача найти упорядоченную совокупность значений неизвестных, при которых это равенство обращается в числовое тождество, то такое равенство называется *уравнением*. О найденной упорядоченной совокупности значений неизвестных говорят, что она удовлетворяет уравнению, и называют *решением* этого *уравнения*.

Решить уравнение — значит найти *все* его решения или доказать, что их нет.

Системы и совокупности уравнений. Несколько уравнений образуют *систему уравнений*, если все они должны удовлетворяться одновременно. *Множество решений системы уравнений* получается как пересечение (см. гл. 10) множеств решений каждого из уравнений системы: из решений, например, первого уравнения оставляют все те, которые удовлетворяют второму, из них оставляют все те, которые удовлетворяют третьему, и т. д.

Чтобы показать, что уравнения образуют систему, их объединяют слева фигурной скобкой. Пусть, например, задана система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Решение первого уравнения $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ а решение второго уравнения $\begin{cases} x = k, \\ y = -k, \end{cases}$ где k — любое вещественное число. Решением системы будет

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Несколько уравнений образуют *совокупность уравнений*, если должно удовлетворяться хотя бы одно из этих уравнений. *Множество решений совокупности уравнений* получается как объединение множеств решений всех уравнений, входящих в совокупность: к решениям первого уравнения добавляют решения второго, третьего и т. д. Совокупность уравнений удобно записывать в строку. Если совокупность уравнений записывают в столбец, то их объединяют слева квадратной скобкой.

Например,

$$x^2 - 1 = 0,\ \ x^3 - 3x + 2 = 0, \text{ или } \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0, \\ x^3 - 3x + 2 = 0. \end{array}\right.$$

Корни первого уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Корни второго уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Решение совокупности уравнений: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Классификация уравнений.

1. Уравнение называется *алгебраическим*, если над неизвестными не совершается иных действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

В противном случае уравнение называется *трансцендентным*. К трансцендентным уравнениям относятся логарифмические, показательные, тригонометрические и т. д.

Алгебраические уравнения подразделяются на три типа:

1) *целое* алгебраическое уравнение: обе его части — целые алгебраические выражения относительно неизвестных. Например:

$$(x - \sqrt{5})(x - \pi) = (x + 1)(x + 4),\ x^4 + \frac{2}{5}x^2 - 1 = 0;$$

2) *дробное* (*рациональное*) алгебраическое уравнение, оно содержит в числителе и знаменателе целое алгебраическое выражение относительно неизвестных. Например,

$$\frac{x - \sqrt{2}}{x} = \frac{x^2 - 1}{x + 3} - x;$$

3) *иррациональное* уравнение, оно содержит под знаком корня алгебраическое выражение относительно неизвестных. Например:

$$\sqrt[3]{x + 6} - \sqrt[3]{x - 2} = 2.$$

Решение дробных и иррациональных уравнений может быть сведено к решению целых уравнений.

2. По числу неизвестных уравнения подразделяются на уравнения с *одним* неизвестным, с *двумя*, с *тремя* и т. д.

3. Целое алгебраическое уравнение с одним неизвестным всегда можно преобразовать в равносильное уравнение (см. ниже) вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Степенью исходного уравнения при этом называется степень уравнения, полученного в левой части многочлена.

Уравнения первой степени называются иначе *линейными*, уравнения второй степени — *квадратными*, уравнения третьей степени — *кубическими*.

Равносильность уравнений. Два уравнения называются *равносильными* (в данной области чисел), если каждое решение первого уравнения является решением второго, и обратно: каждое решение второго уравнения является решением первого*.

Другими словами, равносильные уравнения имеют одно и то же множество решений, принадлежащих данной области чисел.

Если всякое решение первого уравнения является решением второго, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Следствие, однако, может иметь такие решения, которые не являются решениями первого уравнения.

Например, уравнения $x - 1 = 0$ и $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$ равносильны в области вещественных чисел. В области же комплексных чисел второе имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = i$, $x_3 = -i$ и является следствием первого уравнения, у которого один корень $x = 1$.

Чтобы доказать, что два уравнения равносильны, достаточно доказать, что каждое из них является следствием другого.

В процессе решения применяются тождества и алгебраические преобразования, позволяющие на каждом шаге заменить данное уравнение либо равносильным уравнением (это может быть система или же совокупность, куда входят неравенства), либо следствием. Решение уравнения состоит в последовательности таких шагов, приводящей уравнение к простейшему виду, когда слева стоит неизвестное, а справа — выражение, не содержащее неизвестных. Если все преобразования исходного уравнения были равносильными, то найденные значения неизвестного образуют в совокупности решения данного уравнения. Если же при преобразованиях имел место переход к следствию, то решение уравнения еще не закончено.

При замене уравнения его следствием ни один корень не пропадает, но могут появиться посторонние корни. Поэтому после того как найдены корни следствия, каждый из них следует проверить, поставив в исходное уравнение, и взять лишь те из них, которые ему удовлетворяют.

---

* Все в границах данной области чисел.

Преобразования, приводящие к равносильным уравнениям.

1. Прибавление к обеим частям уравнения или вычитание из обеих частей его одного и того же выражения, всегда имеющего смысл.

Замечание. Если к обеим частям уравнения $x - 1 = 0$ прибавить выражение $\frac{1}{x-1}$, то получим уравнение

$$x - 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1},$$

не равносильное исходному. У первого уравнения корень $x = 1$, а у второго уравнения корней нет.

2. Перенесение выражения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

У всех членов уравнения можно одновременно поменять знаки на противоположные.

3. Если уравнение приводится к виду $F(x)\ G(x) = 0$, то оно равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} F(x) = 0, \\ G(x) \text{ существует;} \end{cases} \qquad \begin{cases} G(x) = 0, \\ F(x) \text{ существует,} \end{cases}$$

где каждая система состоит из уравнения и условия.

Пример 1. Уравнение $\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} x = 0$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 0 \\ \operatorname{ctg} x \text{ существует, т. е. } \sin x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 0, \\ \operatorname{tg} 2x \text{ существует, т. е. } \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} 2x = 0$, найдем $2x = k\pi$, $x = \frac{\pi k}{2}$; $\operatorname{ctg}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ существует для нечетных $k = 2n + 1$ и не существует для четных $k = 2n$. Таким образом, решение первой системы:

$$x = (2n + 1)\,\frac{\pi}{2}.$$

Решая уравнение ctg $x = 0$, найдем $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$;

$$\operatorname{tg}\left(2(2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}((2n+1)\pi) = 0, \text{ т.е. существует.}$$

Обе системы имеют одинаковые решения. Поэтому решением совокупности систем будет $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

4. Уравнение $F^2(x) = G^2(x)$ равносильно совокупности двух уравнений $F(x) = G(x)$; $F(x) = -G(x)$.

Примеры:

1. $x^2 = (x^2 - 2)^2$;

а) $x = x^2 - 2$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$;

б) $-x = x^2 - 2$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$.

2. $[\lg(x - 3)]^2 = 1$;

а) $\lg(x - 3) = 1$, $x - 3 = 10$, $x_1 = 13$;

б) $\lg(x - 3) = -1$, $x - 3 = 0{,}1$, $x_2 = 3{,}1$.

Преобразования, приводящие к следствию данного уравнения.

1. Переход от уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ к уравнению $P(x) = 0$.

2. Возведение обеих частей уравнения в четную положительную степень с одним и тем же показателем.

3. Переход от уравнения $F(x)\ G(x) = 0$ к совокупности уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$.

4. Переход от уравнений типа

$$\log f(x) + \log g(x) = \log \varphi(x), \log f(x) - \log g(x) = \log \varphi(x),$$

$$k \log f(x) = \log \varphi(x)$$

соответственно к уравнениям

$$\log [f(x)\, g(x)] = \log \varphi(x), \log \frac{f(x)}{g(x)} = \log \varphi(x),$$

$$\log [f(x)]^k = \log \varphi(x).$$

5. Переход от уравнения $\log f(x) = \log \varphi(x)$ к уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

П р и м е р ы:

1. Заменим уравнение $\frac{x^3+3x+2}{x+1} = 0$ его следствием: $x^2 + 3x + 2 = 0$, корни которого $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. Проверкой убеждаемся, что $x_2 = -1$ – посторонний корень. Ответ: $x = -2$.

2. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x-3} = 0$. Перенеся один радикал вправо и возведя обе части в квадрат, найдем:

$$x + 1 = x^2 + x - 3, \text{ т.е. } x^2 - 4 = 0,$$

$$x_1 = -2, \; x_2 = 2.$$

Проверкой убеждаемся, что первый корень посторонний. Ответ: $x = 2$.

3. Уравнение $(x + 3) \lg x = 0$ заменяем совокупностью:

$$x + 3 = 0, \; \lg x = 0,$$

т. е.

$$x_1 = -3, \; x_2 = 1.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что первый корень посторонний. Ответ: $x = 1$.

4. Уравнение $\lg(x + 2) + \lg(3 - x) = \lg(2x - 14)$ после потенцирования примет вид:

$$(x + 2)(3 - x) = 2x - 14, \text{ или } x^2 + x - 20 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4, \; x_2 = -5.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня посторонние, т. е. данное уравнение не имеет корней.

Преобразование систем уравнений.

Каждое уравнение системы можно преобразовать так, чтобы в результате получилось либо равносильное ему уравнение, либо следствие. В ряде случаев переход к следствию вызывает много дополнительных вычислений, поэтому при решении систем следует по возможности сохранять равносильность.

Кроме того, каждую систему можно преобразовать следующим образом:

1. Решить одно уравнение системы относительно одного из неизвестных и заменить это неизвестное в остальных уравнениях найденным выражением. Этот прием называется ***методом исключения***.

2. К любому из уравнений системы можно прибавить любое другое, умноженное на любое действительное число α. Благодаря этому часто можно также исключить некоторые неизвестные или привести системы к более удобному виду.

Если осуществляется переход к системам, являющимся следствием исходной системы, а равносильность не доказана, то проверка логически необходима.

Систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y)\, G_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y)\, G_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

можно заменить совокупностью четырех систем:

$$\begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 = 0, \\ G_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} G_1 = 0, \\ F_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} G_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, мы в общем случае получим следствие исходной системы, поскольку не вошедшие в каждую систему математические выражения могут не существовать для тех значений неизвестных, которые удовлетворяют двум уравнениям, образующим систему.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} (x + y - 2)(y + 2) = 0, \\ (x - y)(x + 1) = 0 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2 = 0, \\ x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, найдем

$$(1,1);\ (-1,3);\ (-2, -2);\ (-1, -2).$$

Проверка не требуется, так как все выражения имеют смысл при всех x и y, а равносильность при преобразованиях не нарушалась.

Использование тождеств.

Пример 3. Решая уравнение

$$2 \sin 2x - 3 \cos 2x = 3$$

с помощью тождеств

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \ \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad (1)$$

получим

$$\frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{3 - 3 \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

Знаменатель нигде не обращается в нуль. Поэтому последнее уравнение можно заменить таким:

$$4\operatorname{tg} x - 3 + 3\operatorname{tg}^2 x = 3 + 3\operatorname{tg}^2 x,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}, \ x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k\pi.$$

Хотя на первый взгляд кажется, что уравнение решено правильно, легко проверить, что $x = \pi(2k + 1)/2$ — корни первоначального уравнения, которые мы потеряли в процессе решения.

Потеря корней произошла потому, что тождества (1) сужают область возможных значений неизвестного. Действительно, левые части этих тождеств существуют при всех x, в то время как правые части перестают существовать при $x = \pi(2k + 1)/2$. Именно эти значения x и были потеряны при замене, а они оказались корнями исходного уравнения.

При решении уравнений можно пользоваться только теми тождествами, которые либо сохраняют область возможных значений неизвестного, либо расширяют ее.

Если все-таки пришлось применить тождество, сужающее область возможных значений неизвестного, то все значения x, которые принадлежали области возможных значений левой части тождества и не попали в область возможных значений его правой части, нуждаются в специальной проверке.

В разобранном примере сразу же после использования тождеств (1) значения $x = \pi(2k + 1)/2$ нужно было проверить, подставив их в исходное уравнение.

Пример 4. Тождества

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

неравноценны. Первая замена может привести к потере корней, так как левая часть перестает существовать при $\cos\frac{x}{2} = 0$, а правая — при $\sin x = 0$, т. е. и при $\sin\frac{x}{2} = 0$ и при $\cos\frac{x}{2} = 0$. Поэтому значения x, при которых $\sin\frac{x}{2} = 0$, нуждаются в отдельной проверке.

Вторая замена не приводит к потере корней, так как и правая и левая части перестают существовать одновременно при $\cos\frac{x}{2} = 0$.

Если использование тождества

$$\log x + \log y = \log(xy)$$

приводит к расширению области возможных значений неизвестного, то замена

$$\log xy = \log x + \log y$$

может привести к потере корней. Действительно, левая часть тождества существует, когда x и y оба положительны или оба отрицательны, в то время как правая часть существует только при положительных x и y. Поэтому при логарифмировании можно воспользоваться заменой

$$\log(xy) = \log|x| + \log|y|,$$

которая расширяет область возможных значений неизвестного, а не сужает ее. После такой замены проверка обязательна, так как могут появиться решения, при которых x и y имеют разные знаки, т. е. левая часть перестает существовать (см. гл. 8).

То же самое следует сказать и о преобразовании корня из произведения $\sqrt{xy}$ и аналогичных ему выражений. Здесь возможна замена:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\,\sqrt{|y|},$$

которая расширяет область возможных значений неизвестного. Решение следует закончить проверкой.

5.2. Алгебраические уравнения с одним неизвестным

Прежде чем приступить к решению алгебраического уравнения, его следует сначала преобразовать по следующей **схеме:**

1) освободить обе части уравнения от дробей*;

---

* При этом получается следствие данного уравнения, и решение необходимо закончить проверкой.

2) раскрыть скобки, в которых содержится неизвестное*;

3) все члены перенести в левую часть уравнения;

4) сделать приведение подобных членов. В случае, если неизвестное в одной и той же степени входит в несколько членов с буквенными коэффициентами, вынести это неизвестное за скобки.

Уравнение первой степени (линейное). Общий вид

$$ax + b = 0.$$

1) Если $a \neq 0$, a и b — вещественные числа, то уравнение имеет, и притом единственный, корень

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней. (Ему удовлетворяет любое вещественное число.)

Уравнение второй степени (квадратное). Общий вид

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

$a \neq 0$, a, b и c — вещественные числа.

Решение уравнения (1) записывается в виде

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Исследование решения:

при $b^2 - 4ac > 0$ уравнение имеет 2 различных действительных корня;

» $b^2 - 4ac = 0$ » » 2 одинаковых действительных корня;

» $b^2 - 4ac < 0$ » » 2 комплексно-сопряженных корня; действительных корней нет.

Рассмотрим частные случаи квадратного уравнения.

---

* Если буквенное выражение в скобках не содержит неизвестного, то такие скобки раскрывать не рекомендуется.

С л у ч а й 1. *Неполные* квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$.

Решение уравнения:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

действительные решения есть, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $ac < 0$ или же $c = 0$.

б) $ax^2 + bx = 0$.

Решение уравнения:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a},$$

С л у ч а й 2. *Приведенное* квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Решение уравнения:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

С л у ч а й 3. *Квадратное* уравнение вида

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Решение уравнения:

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \quad x_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Теорема Виета для квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами следующими соотношениями:

а) для уравнения общего вида

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного уравнения:

$$x_1 + x_2 = -p;\ x_1x_2 = q.$$

Разложение квадратного трехчлена.

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (2)$$

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения (2), то

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, дополнив его до полного квадрата, а затем обозначив $x + \frac{b}{2a} = z$, можно привести к каноническому виду

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(z^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Биквадратное уравнение. Общий вид

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0$$

(частный случай уравнения четвертой степени).

Заменой неизвестного $x^2 = y$ уравнение приводится к квадратному.

Биквадратное уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ в случае, когда $q > 0$, можно привести к квадратному, поделив обе части его на x^2 и введя новое неизвестное

$$x + \frac{\sqrt{q}}{x} = y.$$

Последний прием особенно удобен, если q является квадратом рационального числа.

Корни биквадратного уравнения

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Знаки перед корнями выбираются независимо друг от друга, т. е. имеют место четыре возможности.

Свойства корней биквадратного уравнения.

1. Если биквадратное уравнение имеет корень a, то оно имеет и корень $-a$.

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться ***формулой сложного радикала:***

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 - B}\right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - B}\right)}.$$

Последняя полезна лишь в том случае, если $\sqrt{A^2 - B}$ есть рациональное число. Для биквадратного уравнения это бывает при условии, что выражение $\sqrt{\frac{c}{a}}$ рационально.

Возвратное уравнение четвертой степени. Общий вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0,$$

где $a \neq 0$, а m может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Указанное уравнение, если предварительно разделить его на x^2, приводится к виду

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0. \qquad (1)$$

Введем теперь новое неизвестное

$$y = x + \frac{m}{x},$$

тогда $y^2 = x^2 + 2m + \frac{m^2}{x^2}$, следовательно, $x^2 + \frac{m^2}{x^2} = y^2 - 2m$.

Подставив в уравнение (1), получим квадратное уравнение относительно неизвестного y:

$$a(y^2 - 2m) + by + c = 0,$$

или

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Представляют интерес следующие два частных случая возвратного уравнения четвертой степени:

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(m = 1)$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ $(m = -1)$.

Они называются симметрическими уравнениями четвертой степени соответственно первого и второго рода и решаются точно так же, как и квадратные. Для первого из них вводят новое неизвестное по формуле $y = x + \frac{1}{x}$, а для второго — по формуле $y = x - \frac{1}{x}$.

Свойства корней симметрического уравнения.

1. Если γ — корень симметрического уравнения первого рода, то это уравнение имеет своим корнем $\frac{1}{\gamma}$. Если γ — корень симметрического уравнения второго рода, то оно имеет своим корнем и $-\frac{1}{\gamma}$.

2. Произведение всех корней симметрического уравнения равно единице (по теореме Виета).

Двучленное уравнение. Общий вид

$$ax^n + b = 0, \; a \neq 0.$$

Разделив на a и обозначив $\left|\frac{b}{a}\right| = A$, получим одно из уравнений

$$x^n + A = 0, \; x^n - A = 0, \; A > 0.$$

Для решения двучленного уравнения достаточно найти все корни уравнения

$$y^n - 1 = 0 \tag{1}$$

или

$$y^n + 1 = 0, \tag{2}$$

соответственно и умножить каждый из них на $\sqrt[n]{A}$.

В области действительных чисел:

1) при четных n уравнение (1) имеет два действительных корня: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, а уравнение (2) ни одного;

2) при нечетных n уравнения (1) и (2) имеют по одному действительному корню $y = 1$, $y = -1$, соответственно.

В области комплексных чисел каждое из уравнений (1) и (2) имеет n различных корней, которые можно найти по формуле Муавра.

Трехчленное уравнение. Общий вид

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \ (a \neq 0). \qquad (1)$$

При $n = 2$ это уравнение является биквадратным. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^n = y, \\ ay^2 + by + c = 0. \end{cases}$$

Уравнение n-й степени. Общий вид

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_0 \neq 0). \qquad (1)$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ. Уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами имеет n комплексных корней, среди которых могут быть и кратные.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения (1), то левую часть его можно представить в виде

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

ТЕОРЕМА ВИЕТА. Корни $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ уравнения (1) связаны с его коэффициентами следующими соотношениями:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Общей алгебраической формулы для отыскания корней уравнения выше четвертой степени не существует и существовать не может. Корни уравнений высоких степеней можно найти приближенно с любой степенью точности.

Рациональное уравнение. *Рациональное* алгебраическое уравнение с помощью тождественных преобразований можно привести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Уравнение $P(x) = 0$ является следствием уравнения (1). Найдя корни $P(x)$, возьмем те из них, которые удовлетворяют уравнению (1), т. е. при которых $P(x) = 0$, $Q(x)$ существует и $Q(x) \neq 0$.

Иррациональное уравнение. *Иррациональным* называется уравнение, в котором некоторое рациональное или алгебраическое выражение, содержащее неизвестное, находится под знаком радикала. При решении иррациональных уравнений в элементарной математике ставится задача отыскания только действительных корней.

Любое иррациональное уравнение с помощью преобразований, включающих умножение обеих его частей на одно и то же выражение, содержащее неизвестное, перенесение слагаемых из одной части в другую, приведение подобных и вынесение множителя за скобки, а также возведение обеих частей уравнения в целую положительную степень, может быть преобразовано в целое алгебраическое уравнение, являющееся следствием данного.

Проверка решений полученного уравнения обязательна!

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x+2} + x = 2$.

Оставляем в левой части только радикал, перенеся остальные члены в правую часть уравнения:

$$\sqrt{x+2} = 2 - x.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x + 2 = 4 - 4x + x^2;$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Последнему уравнению удовлетворяют два значения неизвестного:

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Проверка: $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ не является корнем исходного уравнения, так как

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} + \frac{5+\sqrt{17}}{2} > 2.$$

Пользуясь формулой сложного радикала (см. пример 4 в п. 4.1), найдем, что

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}+2} + \frac{5-\sqrt{17}}{2} = \sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} + \frac{5-\sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{17}-1}{2} + \frac{5-\sqrt{17}}{2} = 2.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет только один действительный корень $x = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+10} = 0.$$

Можно поступить, как в примере 4, но здесь легко сразу заметить, что уравнение не имеет корней, так как

$$\sqrt{x+2} \geqslant 0 \text{ и } \sqrt{x+10} \geqslant 0$$

(мы рассматриваем только арифметические корни!). Равенство нулю в этих неравенствах не может быть достигнуто одновременно.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+10} = 4.$$

Способ 1-й. Переносим один радикал в правую часть равенства и возводим обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{x+2} = 4 - \sqrt{x+10},$$

$$x + 2 = 16 - 8\sqrt{x+10} + x + 10,$$

$$\sqrt{x+10} = 3.$$

Последнее уравнение снова возводим в квадрат и находим

$$x = -1.$$

Проверка подтверждает, что единственное значение $x = -1$ является корнем:

$$\sqrt{-1+2} + \sqrt{-1+10} = 1 + 3 = 4.$$

Способ 2-й. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(x+10)} + x + 10 = 16,$$

$$\sqrt{(x+2)(x+10)} + x = 2.$$

Уединяем радикал и снова возводим в квадрат обе части уравнения:

$$(x + 2)(x + 10) = 4 - 4x + x^2,$$
$$12x + 20 = 4 - 4x,$$
$$x = -1.$$

Мы снова нашли тот же корень уравнения.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x^2-9x+8} + x = 2.$$

Уединяем радикал и возводим обе части уравнения в куб:

$$\sqrt[3]{2x^2-9x+8} = 2 - x,$$
$$2x^2 - 9x + 8 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3,$$
$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3.$$

Проверкой убеждаемся, что все три значения являются корнями.

Замечание. В примере 7 проверка была, по сути дела, лишней, так как возведение в куб (и любую нечетную степень) не влечет приобретения новых действительных корней.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{x^2-5x+38} + \sqrt[5]{237+5x-x^2} = 5.$$

Обозначим первый радикал через s, а второй через t. Тогда данное уравнение примет вид $s + t = 5$. Выражение под первым радикалом равно s^5, а под вторым t^5. Их сумма равна 275. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} s + t = 5, \\ s^5 + t^5 = 275. \end{cases}$$

Решая эту систему (см. пример 33, с. 113), найдем

$$\begin{cases} s_1 = 2, \\ t_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} s_2 = 3, \\ t_2 = 2. \end{cases}$$

Остальные решения мнимые, их при решении иррациональных уравнений не рассматривают.

Учитывая введенные обозначения, для первого решения получим

$$x^2 - 5x + 38 = 32, \text{ или } x^2 - 5x + 6 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 2, \; x_2 = 3.$$

Второе решение для s дает нам уравнение

$$x^2 - 5x + 38 = 243, \text{ или } x^2 - 5x - 205 = 0,$$

откуда

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{845}}{2} = \frac{5 \pm 13\sqrt{5}}{2}.$$

П р о в е р к а показывает, что все корни удовлетворяют данному уравнению.

5.3. Трансцендентные уравнения

Уравнения, не сводящиеся к алгебраическим с помощью элементарных алгебраических преобразований (умножение, перенесение слагаемых из одной части уравнения в другую, приведение подобных и вынесение множителя за скобки, возведение в целую положительную степень), называются *трансцендентными*. Использована аналогия с введением понятия трансцендентного числа, которое также определяется как неалгебраическое.

Ниже на конкретных примерах показаны способы решения показательных и логарифмических уравнений. К трасцендентным относятся тригонометрические уравнения, а также уравнения, которые одновременно содержат показательные и логарифмические, логарифмические и тригонометрические и другие комбинации соответствующих математических выражений.

Показательные уравнения. *Показательным* называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателях степени при основаниях, которые могут быть либо числами, либо параметрами.

Приведем несколько способов решения показательных уравнений.

С п о с о б 1-й — приведение уравнения к равенству степеней с одинаковым основанием.

Пример 9. $3^x\, 9^x = 81$.

Преобразуем уравнение к виду $3^x\, 3^{2x} = 3^4$, или $3^{3x} = 3^4$. Степени числа 3 равны, следовательно, равны и их показатели:

$$3x = 4,$$

откуда $x = 4/3$.

С п о с о б 2-й — вынесение за скобки.

Пример 10. $5^{2x+1} + 2 \cdot 5^{2x} + 5^{2x-1} = 900$.

Выносим за скобки 5^{2x-1} и получаем

$$5^{2x-1}\,(25 + 10 + 1) = 900.$$

Так как $900 = 36 \cdot 5^2$, то $5^{2x-1} = 5^2$. Следовательно, $2x - 1 = 2$, откуда $x = 3/2$.

С п о с о б 3-й — введение вспомогательного неизвестного.

Пример 11. $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$.

Положив $3^x = y$, получим

$$y^2 - 8y - 9 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 9,\ y_2 = -1.$$

Второе значение не является корнем исходного уравнения, так как 3^x не может быть отрицательным. Остается $3^x = 9$, откуда $x = 2$.

С п о с о б 4-й — логарифмирование.

Пример 12. $7^x = 23$.

Это уравнение имеет единственное решение (в силу монотонности показательной функции). Логарифмируя обе части уравнения, получаем

$$x \lg 7 = \lg 23, \text{ откуда } x = \frac{\lg 23}{\lg 7}.$$

Логарифмические уравнения. *Логарифмическим* называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифмической функции, основание которой либо число, либо параметр.

Приведем три способа решения логарифмических уравнений.

Способ 1-й — потенцирование.

Пример 13. $\lg(x^2 + 17x + 6) - \lg(2x + 1) = 1$.

В результате потенцирования получим следствие данного уравнения:

$$\lg \frac{x^2+17x+6}{2x+1} = \lg 10,$$

$$\frac{x^2+17x+6}{2x+1} = 10, \quad \text{т. е. } x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = -1.$$

Второе значение не является корнем, так как $2x + 1$ при $x = -1$ меньше нуля, а логарифма отрицательного числа не существует.

$x = 4$ — корень исходного уравнения, в чем убеждаемся проверкой.

Способ 2-й — введение вспомогательного неизвестного.

Пример 14. $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$.

Обозначим $\lg x = y$. Тогда $\dfrac{1}{5-y} + \dfrac{2}{1+y} = 1$, откуда $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, т. е.

$$x_1 = 10^3,\ x_2 = 10^2.$$

Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют уравнению.

Способ 3-й — логарифмирование. Во избежание потери корней оно осуществляется по формулам:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|,$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|.$$

Пример 15. $\lg[(x + 9)^2 x^4] = \lg x^2 + 2$.

Прологарифмируем:

$$2 \lg|x + 9| + 4 \lg|x| = 2 \lg|x| + 2.$$

Приведя подобные члены и пропотенцировав, получим

$$\lg|x(x + 9)| = 1,$$

откуда $|x(x + 9)| = 10$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений:

$$x^2 + 9x - 10 = 0,\ x^2 + 9x + 10 = 0.$$

Решая квадратные уравнения, получим

$$x_1 = -10,\ x_2 = 1,\ x_{3,\,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Проверка показывает, что все найденные значения x удовлетворяют уранвнению.

5.4. Системы алгебраических уравнений

Метод Гаусса исключения неизвестных. Наиболее распространенным и, пожалуй, самым простым способом решения систем линейных уравнений является *метод Гаусса исключения неизвестных*. При решении линейных уравнений этим методом используются следующие преобразования, приводящие к равносильной системе уравнений:

1) перестановка двух уравнений;
2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля;
3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответственных частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число (отличное от нуля).

«Исключение неизвестных» означает построение равносильной системы линейных уравнений, имеющей ступенчатый вид, т. е. x_1 может содержаться не более чем в одном уравнении, x_2 — не более чем в двух, ..., x_k — не более чем в k уравнениях.

Приведем примеры, в которых подробно разобраны техника вычислений и все случаи, которые могут при этом встретиться.

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Так как преобразования системы уравнений, о которых говорилось выше, не изменяют решений системы и сохраняют ее общий вид, то мы будем записывать вместо уравнений лишь их коэффициенты, расположенные в строку. Если некоторые неизвестные в уравнении отсутствуют, это означает, что коэффициент при них равен нулю, и мы записываем в строке на соответствующем месте нуль. При этом свободные члены будем отделять чертой.

Дальше все преобразования над уравнениями будем переносить на строки соответствующей таблицы.

Исключим неизвестное x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений. Умножив первое уравнение на −2 и прибавив его ко второму, мы получим уравнение, не содержащее x_1. Аналогичный результат получится, если умножить первое уравнение на −3 и −2 и прибавить соответственно к третьему и четвертому уравнениям системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Теперь из четвертого и третьего уравнений исключаем x_2. Для этого второе уравнение (вторая строка) умножаем на $-\frac{4}{5}$ (множитель равен отношению соответствующих коэффициентов, взятому с обратным знаком) и прибавляем к третьему, затем умножаем на $-\frac{7}{5}$ и прибавляем к четвертому:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 7{,}2 & 3{,}6 & -14{,}4 \end{array}\right).$$

Наконец, исключаем x_3 из четвертого уравнения, прибавляя к нему третье, умноженное на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right).$$

В результате мы получили систему ступенчатого вида:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ \qquad - x_3 + 2x_4 = -3, \\ \qquad\qquad x_4 = -2, \end{cases}$$

которую легко решить, подставляя в каждое уравнение результат решения всех уравнений, расположенных под ним:

$$\begin{cases} x_4 = -2, \\ x_3 = 3 + 2\,(-2) = -1, \\ x_2 = \dfrac{4 - 2 - 8(-1)}{5} = 2, \\ x_1 = 6 + 2\,(-2) - 3\,(-1) - 2 \cdot 2 = 1. \end{cases}$$

Если система несовместна (т. е. составляющие ее уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получится абсурдное равенство типа $1 = 0$. Обратно: если мы получили уравнение $1 = 0$ (вместо единицы в левой части может стоять любое другое число, не равное нулю), то система несовместна.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 14. \end{cases}$$

Исключая последовательно x_1 и x_2, получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -8{,}8 \end{array}\right).$$

(Символ ~ означает, что системы уравнений, соответствующие этим таблицам, эквивалентны.)

Вычитаем из четвертого уравнения третье:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ -3{,}6x_3 + 7{,}2x_4 = -10{,}8, \\ 0 = 2, \end{cases}$$

в которой последнее уравнение абсурдно. Следовательно, исходная система несовместна.

Пример 18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

Последовательно исключая неизвестные, получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \end{array}\right).$$

Мы видим, что третье и четвертое уравнения совершенно одинаковы. Поэтому, продолжая процесс исключения дальше, т. е. вычитая из четвертого уравнения третье, мы получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 - x_4 = -4, \\ -3{,}6x_3 + 7{,}2x_4 = -10{,}8, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение является очевидным тождеством и его можно отбросить, третье уравнение можно сократить на 3,6:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 - x_4 = -4, \\ -x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$$

Считая, что значение неизвестного x_4 задано, выразим через x_4 все остальные неизвестные:

$$x_3 = 2x_4 + 3,$$

$$x_2 = \frac{4 - x_4 - 8(2x_4 + 3)}{5} = -4 - 3{,}4x_4,$$

$$x_1 = 2(4 + 3{,}4x_4) + 3(2x_4 + 3) - 2x_4 + 6 = 23 - 10{,}8x_4.$$

В этом случае система имеет бесконечное множество решений: придав x_4 любое значение, мы получим соответствующие значения для остальных неизвестных.

Ниже показано, как используются для исследования систем линейных уравнений определители.

Определители. Любые четыре числа, которые мы для удобства обозначим a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, можно расположить в виде квадратной таблицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называемой *матрицей размерности* (2×2) или *квадратной матрицей второго порядка*. Можно считать, что матрица **A** образована двумя строками $(a_{11}\ a_{12})$ и $(a_{21}\ a_{22})$, каждую из которых можно рассматривать как вектор (говорят *вектор-строка*), или двумя столбцами

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

(говорят *вектор-столбец*).

Каждой квадратной матрице второго порядка можно поставить в соответствие число, называемое ее определителем (определителем второго порядка) и обозначаемое $D = |\mathbf{A}|$:

$$D = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Первый индекс i каждого из чисел a_{ij} указывает номер строки, в которой находится число, а второй индекс j — номер столбца.

Определители второго порядка вычисляются по правилу

$$D = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Девять элементов a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$, располагаются в квадратную таблицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

которая является *квадратной матрицей третьего порядка*. Матрица третьего порядка состоит из трех векторов-столбцов или же из трех векторов-строк. Ей можно поставить в соответствие число, которое называется *определителем третьего порядка* и обозначается

$$D = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель второго порядка, полученный из определителя третьего порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, называется *минором* этого элемента:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Каждый определитель третьего порядка можно разложить по элементам строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Используя это свойство, можно вычислить определитель четвертого порядка, сведя его к четырем определителям третьего порядка, и т. д.

Определитель третьего порядка можно непосредственно вычислить по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

т. е. к элементам определителя приписываются справа два первых столбца и вычисляется алгебраическая сумма произведений «диагональных» элементов:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Общий вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

(Хотя бы один из коэффициентов при неизвестных предполагается отличным от нуля.)

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Случай 1-й. Если $D \neq 0$, то система имеет решение и притом единственное:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Случай 2-й. Если

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система неопределенна, так как тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$

т. е. второе уравнение системы получается из первого умножением на k. Система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными, имеющему бесконечно много решений: достаточно задать произвольно y, как мы найдем соответствующее x, или наоборот: по заданному x найдем соответствующее y.

Случай 3-й. Определитель $D = 0$, а один из определителей

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. В этом случае система противоречива и не имеет решения.

Пример 19. Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

Находим

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1.$$

Пример 20. Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 2. \end{cases}$$

Находим

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Второе уравнение получено из первого умножением на 2.

Система сводится к одному уравнению $2x + y = 1$, или $y = 1 - 2x$ и, следовательно, имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} x = k, \\ y = 1 - 2k. \end{cases}$$

По заданному значению x всегда можно найти соответствующее ему значение y.

Пример 21. Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

Находим

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Уравнения противоречивы. Система не имеет решения.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Общий вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Случай 1-й. Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_1 \\ a_{21} & b_{22} & b_2 \\ a_{31} & b_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

Случай 2-й. Если $D = 0$ и все три определителя, стоящие в числителях, тоже равны нулю, то система неопределенна. Она сводится к двум или к одному уравнению с тремя неизвестными.

Задавая одно или два неизвестных, решаем затем либо систему двух уравнений с двумя неизвестными, либо одно уравнение с одним неизвестным.

Случай 3-й. $D = 0$, один из определителей, стоящих в числителе, не равен нулю. Уравнения противоречивы. Решений у системы нет.

Пример 22. Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

Находим

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18} = 0,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{18} = 0,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18} = 1.$$

Пример 23. Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1, \\ x + 2y + 2z = 2, \\ 4x + 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

Находим

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Система неопределенна и, следовательно, имеет бесчисленное множество решений. Нетрудно заметить, что последнее уравнение есть сумма первых двух.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1, \\ x + 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, то систему можно решать относительно x и y, считая z известным:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 - z, \\ x + 3y = 2\,(1 - z). \end{cases}$$

Находим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ 2(1 - z) & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1 - z}{8}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 - z \\ 1 & 2(1 - z) \end{vmatrix}}{8} = \frac{5(1 - z)}{8}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - k}{8}, \\ y = \dfrac{5(1 - k)}{8}, \\ z = k. \end{cases}$$

Пример 24. Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 2, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

Находим

$$D = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Система противоречива и, следовательно, не имеет решения.

Простейшие системы, содержащие уравнения второй степени. Приведем способы решения на примерах систем, встречающихся на практике.

Пример 25. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{1}$$

Способ 1-й. На основе теоремы, обратной теореме Виета, легко устанавливаем, что данная система равносильна квадратному уравнению

$$z^2 - pz + q = 0,$$

имеющему два корня:

$$z_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \; z_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

При $p^2 > 4q$ система (1) имеет два решения:

$$1) \begin{cases} x = z_1, \\ y = z_2, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x = z_2, \\ y = z_2. \end{cases}$$

При $p^2 = 4q$ эти решения «склеиваются» в одно $x = y = \dfrac{p}{2}$.

Способ 2-й. Из возведенного в квадрат первого уравнения системы (1) вычтем учетверенное второе. Получим

$$(x - y)^2 = p^2 - 4q, \text{ откуда } x - y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}\,.$$

Далее решаем систему $\begin{cases} x + y = p, \\ x - y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}\,, \end{cases}$ являющуюся следствием исходной. Находим два решения: x_1, y_1 и x_2, y_2, где

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\,,\ \ y_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\,,$$

и оставляем лишь те, которые удовлетворяют исходной системе.

Пример 26. Решить систему

$$\begin{cases} x - y = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) с помощью замены неизвестного $u = -y$ сводится к системе

$$\begin{cases} x + u = p, \\ xu = -q, \end{cases}$$

отличающейся от системы (1) лишь обозначениями неизвестного.

Замечание. Система $\begin{cases} ax + by = p, \\ xy = c \end{cases}$ приводится к виду (1) заменой $ax = u,\ by = v,\ q = abc$.

Пример 27. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x^2 + y^2 = q. \end{cases} \tag{3}$$

Из возведенного в квадрат первого уравнения вычитаем второе. Получим

$$xy = \frac{p^2 - q}{2}\,.$$

Затем решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = \dfrac{p^2 - q}{2}, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной системы (3). Таким образом, система (3) легко сводится к системе (1).

Пример 28. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x^2 - y^2 = q. \end{cases}$$

Если $p \neq 0$, то, подставив первое уравнение во второе, получим

$$x - y = \frac{q}{p}.$$

Затем решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x - y = \dfrac{q}{p}, \end{cases}$$

равносильную исходной. Получим

$$x = \frac{1}{2}\left(p + \frac{q}{p}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(p - \frac{q}{p}\right).$$

Пример 29. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{4}$$

К первому уравнению прибавим удвоенное второе; затем из первого уравнения вычтем удвоенное второе. Получим систему

$$\begin{cases} (x + y)^2 = p + 2q, \\ (x - y)^2 = p - 2q. \end{cases} \tag{5}$$

Если $p + 2q > 0$ и $p - 2q > 0$, то из системы (5) получаем четыре системы:

$$1) \begin{cases} x + y = \sqrt{p + 2q}, \\ x - y = \sqrt{p - 2q}; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + y = \sqrt{p + 2q}, \\ x - y = \sqrt{p - 2q}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = \sqrt{p + 2q}, \\ x - y = \sqrt{p - 2q}; \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} x + y = \sqrt{p + 2q}, \\ x - y = \sqrt{p - 2q}, \end{cases}$$

каждая из которых может дать одно решение системы (4). Проверка необходима.

Пример 30. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) легко сводится к системе (2). Для этого достаточно возвести второе уравнение в квадрат и произвести затем замену неизвестных:

$$x^2 = u, \;\; y^2 = v.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} u - v = p, \\ uv = q^2, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной системы (6).

Замечание. Системы

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = p, \\ xy = c \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} ax^2 - by^2 = p, \\ xy = c, \end{cases}$$

где $a > 0$, $b > 0$, можно привести к виду (4) или (6), соответственно, с помощью замены $u = x\sqrt{a}$, $v = y\sqrt{b}$, $q = c\sqrt{ab}$.

Пример 31. Решить систему

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = a, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = b, \text{ где } b \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Введем новое неизвестное $t = \dfrac{y}{x}$ и сделаем замену $y = tx$:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = a, \\ a_2x^2 + b_2tx^2 + c_2t^2x^2 = b. \end{cases} \tag{8}$$

Разделим первое уравнение на второе (можно доказать, что при $b \neq$ $\neq 0$ это не приводит к потере корней):

$$\frac{a_1 + b_1t + c_1t^2}{a_2 + b_2t + c_2t^2} = \frac{a}{b}.$$

Последнее уравнение заменяем равносильным ему уравнением

$$(bc_1 - ac_2)\,t^2 + (bb_1 - ab_2)\,t + ba_1 - aa_2 = 0.$$

Решая его, найдем t_1 и t_2. Подставляя найденные значения t_1 и t_2 в любое из уравнений (8), получим квадратные уравнения относительно x.

В общем случае у системы (7) будет четыре решения.

Замечание 1. Систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = a, \\ a_2x_2 + b_2xy + c_2y_2 = b \end{cases}$$

всегда можно решить подстановкой. Иногда удобнее возвести первое уравнение в квадрат (например, если это позволяет в дальнейшем исключить квадраты).

Замечание 2. Если система состоит из уравнений, степени которых соответственно n_1 и n_2, то у нее не более чем n_1n_2 решений.

Замечание 3. Решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1xy + c_1y^2 = 0, \\ a_2x_2 + b_2xy + c_2y^2 = 0 \end{cases} \quad (a_i,\ b_i,\ c_i \neq 0) \qquad (9)$$

с помощью замены $y = tx$ сводится к решению системы

$$\begin{cases} x^2\,(a_1 + b_1t + c_1t^2) = 0, \\ x^2\,(a_2 + b_2t + c_2t^2) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если $x = 0$, то из (9) видно, что $y = 0$.

Если $x \neq 0$, то система (10) принимает вид

$$\begin{cases} a_1 + b_1t + c_1t^2 = 0, \\ a_2 + b_2t + c_2t^2 = 0, \end{cases}$$

т. е. система не всегда имеет решение.

Симметричные системы уравнений. Система уравнений, которая не изменится, если вместо x во всех уравнениях подставить y, а вместо y подставить x, называется *симметричной* относительно x и y.

Симметричную систему целых уравнений часто удается решить, введя новые переменные (см. п. 4.2, с. 68):

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases} \qquad (11)$$

Если система симметрична относительно x и y, то у нее наряду с решением

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ y_1 = \beta. \end{cases} \quad \text{есть решение} \quad \begin{cases} x_2 = \beta, \\ y_2 = \alpha. \end{cases}$$

Если у системы уравнений есть решение

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ y_1 = \alpha, \end{cases}$$

то можно считать, что два решения совпали.

Пример 32. Найти действительные решения системы

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x \ + xy + y \ = 2. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему с помощью замены (11):

$$\begin{cases} u^2 - v = 4, \\ u \ + v = 2. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим

$$u^2 + u - 6 = 0,$$

откуда $u_1 = 2$, $u_2 = -3$. Соответственно $v_1 = 0$, $v_2 = 5$.

Данная система свелась к совокупности следующих двух:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Решая их (см. пример 21), находим действительные решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Пример 33. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^5 + y^5 = 275. \end{cases}$$

Сделав замену (11), преобразуем данную систему к виду

$$\begin{cases} u = 5, \\ u^5 - 5u^3v + 5uv^2 = 275. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение $b = 5$, после сокращения получим $v^2 - 25v + 114 = 0$, откуда $v_1 = 6$, $v_2 = 19$.

Задача свелась к решению совокупности систем

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 19 \end{cases}$$

(см. пример 21).

6. Неравенства

6.1. Общие сведения

Определения. Неравенством называется выражение, образованное посредством соединения знаком $<$ (меньше) или $>$ (больше) двух алгебраических выражений.

Знак неравенства всегда обращен вершиной угла в сторону меньшей из сравниваемых величин. Кроме строгих неравенств рассматривают и соотношения, допускающие равенство: $\leqslant$ (меньше или равно), $\geqslant$ (больше или равно).

Свойства и преобразования неравенств.

1. Если $a > b$, то $a + p > b + p$, $a - p > b - p$ (p – произвольное);

$$ap > bp \text{ при } p > 0; \quad ap < bp \text{ при } p < 0;$$

$$\frac{a}{p} > \frac{b}{p} \text{ при } p > 0; \quad \frac{a}{p} < \frac{b}{p} \text{ при } p < 0.$$

2. Если $0 < a < b$;

то $a^p < b^p$ при $p > 0$, $a^p > b^p$ при $p < 0$;

$$\log_a p > \log_b p \text{ при } 1 < a < b;\ p > 0;$$

$$\log_a p > \log_b p \text{ при } 0 < a < b < 1;\ p > 0;$$

$$\log_p a < \log_p b \text{ при } p > 1;$$

$$\log_p a > \log_p b \text{ при } 0 < p < 1.$$

3. Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$; $a - d > b - c$.

4. Если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$; $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

5. Если $a < x < b$, то $(x - a)(x - b) < 0$, и обратно.

Следствие из свойства 1. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

Равносильные неравенства. Система и совокупность неравенств. *Решить* неравенство — значит найти все значения неизвестных, при которых это неравенство выполняется. Два неравенства называются *равносильными* или *эквивалентными*, если их решения совпадают.

Перечисленные на с. 114 элементарные преобразования неравенств приводят к эквивалентным неравенствам.

Неравенства образуют *совокупность*, если их решения *объединяются*, т. е. к решениям первого присоединяются решения второго, третьего и т. д.

Мы говорим о *системе* неравенств, если требуется найти все решения, удовлетворяющие одновременно всем данным неравенствам.

Неравенства, образующие систему, записывают одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой. Совокупность неравенств, как правило, записывают в строку, что позволяет не путать совокупность с системой. Если совокупность неравенств записана в столбец, то их объединяет стоящая слева квадратная скобка.

Решить систему, состоящую из нескольких совокупностей неравенств, значит найти все значения неизвестного, удовлетворяющие всем входящим в систему совокупностям.

Пример 1. Решить систему совокупностей неравенств

$$\begin{cases} x < -2, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x < -3, & 1{,}5 < x \leqslant 3, \\ -2{,}5 < x \leqslant 2, & x > 2{,}7. \end{cases}$$

Начнем с первой совокупности: $x < -2,\ 1 \leqslant x \leqslant 2$. Над точками числовой прямой, удовлетворяющими каждому из этих неравенств, построим соответственно открытый и закрытый прямоугольники (рис. 14). При этом точку -2, которую нужно исключить, отметим светлым кружочком, а точки $+1$ и $+2$ — черными. Так же строим решения для двух других совокупностей. Чтобы избежать путаницы, для каждой совокупности строим прямоугольники разной высоты. Точки числовой оси, над которыми расположатся три прямоугольника (по количеству совокупностей в системе!) разной высоты, дадут решение системы: $1{,}5 < x \leqslant 2$.

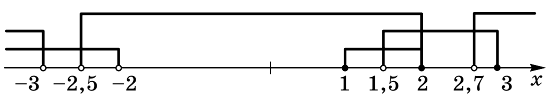


Рис. 14

6.2. Решение неравенств

Неравенство первой степени (линейное). Неравенство

$$ax + b > 0 \qquad (1)$$

решается так:

1) если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$;

2) если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$;

3) если $a = 0$, то при $b > 0$ x — любое действительное число, а при $b \leqslant 0$ неравенство решений не имеет.

Геометрически при $a \neq 0$ решение линейного неравенства (1) представляет собой луч, исходящий из точки $-\frac{b}{a}$ и направленный вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Метод интервалов. Неравенства вида

$$P(x) > 0, \ P(x) \geqslant 0, \ \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \ \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0, \qquad (2)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, решаются с помощью *метода интервалов*. Идея метода интервалов заключается в том, что многочлен $P(x)$ при переходе через свой корень нечетной кратности меняет знак, а при переходе через корень четной кратности сохраняет знак. Поэтому достаточно знать корни многочлена $P(x)$, их кратности и знак $P(x)$ в любой точке, где $P(x) \neq 0$, чтобы решить неравенство $P(x) > 0$ или $P(x) \geqslant 0$.

Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ эквивалентно неравенству $P(x)Q(x) > 0$ и его решение ничего нового не требует. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} P(x)\,Q(x) \geqslant 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Применение метода интервалов покажем на примерах.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x + 2)\,(x - 1)\,(x - 3)\,(x - 5)\,(x^2 + 1) > 0.$$

Так как выражение $x^2 + 1$ всегда положительно, то данное неравенство равносильно следующему:

$$(x + 2)\,(x - 1)\,(x - 3)\,(x - 5) > 0.$$

Корни -2, 1, 3, 5 многочлена в левой части неравенства расположены в порядке возрастания на числовой оси (рис. 15). При $x > 5$ многочлен положителен, так как каждое выражение в скобках положительно. Далее при переходе через каждый корень дополнительный сомножитель меняет знак, и знаки произведения чередуются. Решение определяется совокупностью неравенств:

$$x < -2, \quad 1 < x < 3, \quad x > 5.$$

Пример 3. Решить неравенство

$$(x + 3)\,(x + 1)\,(x - 4)^2\,(x - 5) < 0.$$

Множитель $(x - 4)^2$ всегда положителен и только в точке $x = 4$ обращается в нуль. Поэтому его влияние на решение неравенства ограничивается тем, что он исключает точку $x = 4$ (на рис. 16 эта точка отмечена светлым кружочком). Остается решить неравенство

$$(x + 3)\,(x + 1)\,(x - 5) < 0,$$

что мы уже умеем делать. Итак,

$$x < -3, \quad -1 < x < 4, \quad 4 < x < 5.$$

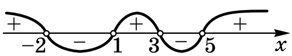


Рис. 15

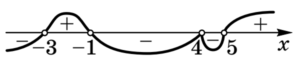


Рис. 16

Пример 4. Решить неравенство

$$(2x - 5)\,(3 - x)^3\,(x - 4)^2 \leqslant 0.$$

Прежде всего, нужно преобразовать неравенство так, чтобы каждый сомножитель, стоящий в скобках, имел канонический вид $x - a$. При этом может измениться знак неравенства:

$$(x - 2{,}5)\,(x - 3)^3\,(x - 4)^2 \geqslant 0.$$

Отметим черными кружочками точки 2,5, 3 и 4, в которых неравенство выполняется, и заменим его таким:

$$(x - 2{,}5)\,(x - 3) > 0.$$

Правее точки $x = 3$ произведение будет неотрицательным, между точками $x = 2{,}5$ и $x = 3$ — отрицательным, а левее точки $x = 2{,}5$ — положительным. Таким образом получаем общее решение данного в примере неравенства (рис. 17):

$$x \leqslant 2{,}5, \quad x \geqslant 3.$$

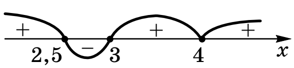


Рис. 17

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)} \leqslant 0.$$

Данное неравенство превращается в равенство в тех точках, где множители, стоящие в числителе, обращаются в нуль. (Корни числителя $x = -3$, $x = -1$ и $x = 5$ обозначены на рис. 18 черными кружочками.) Теперь исключим (обозначим на рисунке светлыми кружочками) те точки $x = 4$, $x = 2$, где в нуль обращается знаменатель, так как в этих точках левая часть неравенства теряет смысл.

Множители $(x + 3)^2$ и $(x - 4)^2$, не меняющие знака на всей числовой оси, можно опустить, так как их влияние уже учтено, левая часть неравенства не меняет в этих точках знак. Во всех остальных точках данное неравенство равносильно такому:

$$(x + 1)\,(x - 5)\,(x - 2) < 0,$$

а неравенства подобного вида мы уже умеем решать. Итак,

$$x \leqslant -1, \quad 2 < x < 4, \quad 4 < x \leqslant 5.$$

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)^3} < 0.$$

Так как в этом примере мы имеем строгое неравенство, то нужно исключить корни числителя и корни знаменателя. После этого множители $(x + 3)^2$, $(x - 4)^2$ и $(x - 2)^2$ не влияют на решение. Воспользовавшись методом интервалов, решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-5)}{x-2} < 0.$$

Получим (рис. 19):

$$x < -3, \quad -3 < x < -1, \quad 2 < x < 4, \quad 4 < x < 5.$$

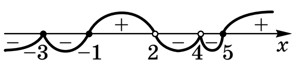


Рис. 18

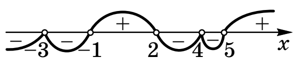


Рис. 19

Неравенство второй степени (квадратное). Неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0 \quad (a \neq 0) \qquad (3)$$

— частный случай второго из неравенств (2). В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ и от знака коэффициента a получим шесть различных вариантов решения этого неравенства (рис. 20).

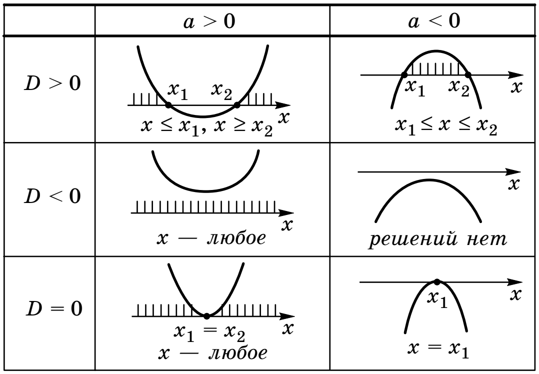


Рис. 20

Иррациональные неравенства.

I. Неравенство

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} < dx + e \qquad \textbf{(4)}$$

эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < (dx + e)^2, \\ ax^2 + bx + c \geqslant 0, \\ dx + e > 0. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть два случая. Пусть $dx + e \leqslant 0$. Из этого предположения следует, что $\sqrt{ax^2 + bx + c} < 0$, т. е. такое неравенство не имеет решений. Пусть теперь $dx + e > 0$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны, и можно возвести их в квадрат, не меняя знака неравенства. В результате получим первое из неравенств системы. Оно не будет равносильно исходному, так как в результате возведения в квадрат оказались разрушенными два ограничения. Во-первых, само возведение в квадрат было возможно лишь при условии, что $dx + e > 0$. Для исходного неравенства (1) это ограничение удовлетворялось автоматически, в то время как теперь выражение $dx + e$ возведено в квадрат и потому может быть отрицательным. Во-вторых, по смыслу первого неравенства системы выражение, стоявшее под корнем, может теперь стать отрицательным, в то время как для исходного неравенства это было невозможно.

После возведения в квадрат мы должны восстановить в с е ограничения, которые присутствуют в неравенстве (1) и пропадают после преобразования. Поэтому в систему добавлены еще два неравенства.

II. Неравенство

$$\sqrt{ax^2+bx+c} > dx+e \qquad (5)$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} dx+e \geqslant 0, \\ ax^2+bx+c > (dx+e)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} dx+e < 0, \\ ax^2+bx+c \geqslant 0. \end{cases}$$

Это означает, что рассматриваются д в а с л у ч а я:

1) $dx+e \geqslant 0$. Тогда обе части неравенства (5) одного знака, т. е. неравенство (5) можно возвести в квадрат. При этом требование неотрицательности подкоренного выражения выполняется автоматически;

2) $dx+e<0$. Если арифметический корень существует, то он больше любого отрицательного числа. Достаточно обеспечить его существование.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-55x+250} < x-14.$$

Его нужно заменить системой неравенств

$$\begin{cases} x^2-55x+250 < (x-14)^2, \\ x^2-55x+250 \geqslant 0, \\ x-14>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>2, \\ x \leqslant 5, \quad x \geqslant 50, \\ x>14, \end{cases}$$

т. е. $x \geqslant 50$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x.$$

Если $x>2$, то неравенство выполняется при всех x, при которых $x^2-3x+2 \geqslant 0$, т. е. при $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$. Решением системы

$$\begin{cases} x>2, \\ x \leqslant 1,\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

будет $x>2$.

Если $x \leqslant 2$, то получим систему

$$\begin{cases} x^2-3x+2 > (2-x)^2, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$$

которая несовместна.

Итак, $x>2$.

Логарифмические неравенства. При потенцировании в неравенствах нужно следить за тем, чтобы выполнялись требования:

1) выражение под знаком логарифма оставалось положительным;

2) выражение в основании логарифма оставалось положительным;

3) выражение в основании логарифма не обращалось в единицу.

В соответствии с этими требованиями при преобразовании логарифмических неравенств необходимо записывать дополнительные условия.

Пример 9. Решить неравенство

$$\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 0.$$

Обычно, решая это неравенство, полагают, что знак модуля гарантирует существование логарифма, забывая, что логарифм нуля не существует. После потенцирования к неравенству

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 1$$

нужно присоединить еще условие $x \neq 1$ (при $x = 1$ число под знаком логарифма обращается в нуль).

Итак, данное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{x-1}{2x+1} < 1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Первое неравенство можно записать так:

$$\left(\frac{x-1}{2x+1} + 1\right)\left(\frac{x-1}{2x+1} - 1\right) < 0,$$

откуда $x < -2,\ x > 0$.

Остается учесть, что $x \neq 1$.

Итак, $x < -2,\ 0 < x < 1,\ x > 1$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2.$$

Необходимо разобрать два случая в зависимости от того, больше или меньше единицы основание логарифмов.

Если $x^2 - 1 > 1$, то логарифмическая функция с таким основанием будет возрастающей, т. е. $3x - 1 < x^2$. Число под знаком логарифма должно быть положительным. Требования, чтобы основание $x^2 - 1$ было больше нуля и не равно единице выполнено, так как мы рассматриваем случай $x^2 - 1 > 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 3x - 1 < x^2, \\ 3x - 1 > 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x < -\sqrt{2}\,,\ x > \sqrt{2}\,, \\ x < \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\,,\ x > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\,, \\ x > \dfrac{1}{3}\,. \end{cases}$$

Решая ее, найдем

$$x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\,.$$

Если основание меньше единицы (но больше нуля!), то логарифмическая функция будет убывающей. В этом случае получаем такую систему:

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1, \\ 3x - 1 > x^2, \\ 3x - 1 > 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем еще одно множество решений:

$$1 < x < \sqrt{2}\,.$$

Итак, $1 < x < \sqrt{2}\,,\ x > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\,.$

Средние величины. Даны n чисел: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ (в приведенных ниже примерах числа 3, 4, 9, 12).

Среднее арифметическое

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,.$$

Например, $\dfrac{3 + 4 + 9 + 12}{4} = 7.$

Среднее геометрическое

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \quad (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0).$$

Например, $\sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 12} = \sqrt[4]{1296} = 6.$

Среднее гармоническое

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

$$(x_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Например, $\dfrac{4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}} = 4 : \dfrac{28}{36} = \dfrac{4 \cdot 36}{28} = \dfrac{36}{7} = 5\dfrac{1}{7}$.

ТЕОРЕМА КОШИ. Среднее геометрическое нескольких неотрицательных величин всегда не меньше их среднего гармонического и не больше их среднего арифметического:

$$H \leqslant G \leqslant A \ (x_i > 0),$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Например, $5\frac{1}{7} < 6 < 7$.

Среднее квадратичное

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \quad (x_i \geqslant 0).$$

Например, $\sqrt{\dfrac{2^2 + 3^2 + 1^2 + 6^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4 + 9 + 1 + 36}{4}} = \sqrt{\dfrac{50}{4}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Среднее взвешенное ($a_i \geqslant 0$ — веса)

$$V = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Некоторые важные неравенства. *Внимание!* Все числа, входящие в следующие неравенства, *неотрицательны*, если не оговорено другое.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.$$

Равенство достигается при условии* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Неравенство Коши

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

справедливо при любых вещественных a_i и b_i. Равенство достигается при условии* $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$.

Обобщенное неравенство Коши

$$(a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r)^{1/r} \geqslant (a_1^s + a_2^s + \ldots + a_n^s)^{1/s},$$

если $r < s$.

Неравенство Гельдера. Если α и β положительны и $\alpha + \beta = 1$, то

$$a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + \ldots + a_n^\alpha b_n^\beta \leqslant$$

$$\leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^\alpha\ (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^\beta.$$

Равенство возможно, если* либо $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$, либо один из сомножителей в правой части обращается в нуль.

Неравенство Минковского

$$(a_1^r + \ldots + a_n^r)^{1/r} + \ldots + (l_1^r + \ldots + l_n^r)^{1/r} \geqslant$$

$$\geqslant [(a_1 + \ldots + l_1)^r + \ldots + (a_n + \ldots + l_n)^r\,]^{1/r},$$

если $r > 1$; знак неравенства меняется на противоположный, если $0 < r < 1$.

Равенство достигается, если* либо $a_1 : \ldots : l_1 = a_2 : \ldots : l_2 = \ldots = a_n : \ldots : l_n$, либо $r = 1$.

---

* Имеется в виду необходимое и достаточное условие.

Неравенство треугольника (частный случай *неравенства Минковского*)

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}.$$

Если α, β, ..., λ больше -1 и все они одного знака, то

$$(1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\lambda)>1+\alpha+\beta+\ldots+\lambda.$$

Если $a_1a_2\ldots a_n=l^n$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant(1+l)^n,$$

равенство достигается при $a_1=a_2=\ldots=a_n$ и только при этом условии.

Если $a_i\neq 0$, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2,$$

равенство достигается при $a_1=a_2=\ldots=a_n$ и только при этом условии.

Если $\mu\geqslant 0$, то

$$x^{\mu}(x-y)(x-z)+y^{\mu}(y-z)(y-x)+z^{\mu}(z-x)(z-y)\geqslant 0,$$

равенство достигается при $x=y=z$ и только при этом условии.

7. Числовые последовательности

Понятие последовательности. Примеры. Простейшим примером последовательности служит последовательность всех натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Любую другую последовательность мы будем рассматривать как функцию натурального аргумента:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots; \qquad (2)$$

a_1, a_2, ..., a_n, ... называются *членами* последовательности; a_1 — ее первый член, a_n — общий член, т.е. члены любой последовательности окажутся занумерованными в том порядке, в котором они расположены.

Иногда последовательность (2) кратко обозначают (a_n), $\{a_n\}$, $F(n)$ или $a(n)$.

Из двух стоящих рядом членов последовательности первый (имеющий меньший номер) называется *предыдущим* по отношению ко второму, а второй — *последующим* по отношению к первому.

Примеры последовательностей:

- последовательность всех чисел, обратных натуральным:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots; \tag{3}$$

- последовательность всех четных чисел:

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\ ; \tag{4}$$

- последовательность всех простых чисел:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \ldots,\ F(n),\ \ldots\ . \tag{5}$$

Последовательность обычно задается указанием зависимости ее n-го члена от числа n, которому этот член соответствует (***формула общего члена***). Так сделано в случаях (3) и (4). Однако не всегда такое задание последовательности возможно. Например, общей формулы для всех простых чисел (пример 5) не найдено.

Некоторые члены последовательности могут быть равны между собой.

Пример 1. Последовательность имеет равные члены на четных и нечетных местах:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ .$$

Пример 2. В последовательности равны между собой члены, номера которых кратны четырем:

$$1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 0,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0,\ \ldots\ .$$

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. $a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. $a_{n+1} < a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Если каждый член последовательности, начиная со второго, не меньше предыдушего ($a_{n+1} \geqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$), то последовательность (a_n) называется *неубывающей*, а если не больше предыдущего ($a_{n+1} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$), то *невозрастающей*.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*. Иногда в качестве монотонных рассматривают последовательности, становящиеся монотонными начиная с некоторого номера N.

Последовательность (3) убывающая, а последовательности (4) и (5) возрастающие. Последовательности в примерах 1 и 2 немонотонные.

Если существует такое положительное число M, что все члены последовательности (a_n) по модулю не превышают числа $M : |a_n| \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность называется *ограниченной*. Если для любого члена последовательности (a_n) имеет место неравенство $a_n \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность (a_n) называется *ограниченной сверху*; если же существует такое число M_1, что $a_n \geqslant M_1$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность (a_n) называется *ограниченной снизу*.

Последовательность (3) является ограниченной, а последовательности (4) и (5) — ограниченными снизу (например, числом 1).

Пример 3. Последовательность, которая не является ограниченной ни снизу, ни сверху:

$$-2, 4, -6, 8, \ldots, 2n(-1)^n, \ldots .$$

Последовательность называется *постоянной*, если все члены ее равны между собой. Постоянная последовательность монотонна.

Арифметическая прогрессия. Последовательность, общий член которой выражается через первый член формулой

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

называется *арифметической прогрессией*.

Число d есть постоянная величина для данной прогрессии и называется *разностью* арифметической прогрессии.

Свойства арифметической прогрессии

1. Разность между любыми двумя соседними членами прогрессии (из последующего вычитается предыдущий) равна d:

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

2. $a_n + a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2}$.

3. $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Сумма n подряд стоящих членов прогрессии начиная с a_1:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)^n}{2} = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}.$$

Геометрическая прогрессия. Последовательность, общий член которой выражается формулой

$$a_n = a_1 q^{n-1} \ (a_1 \neq 0,\ q \neq 0),$$

называется *геометрической прогрессией*.

Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Свойства геометрической прогрессии

1. Частное от деления двух соседних членов (последующий делится на предыдущий) равно q:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

2. $a_n a_{n+3} = a_{n+1}\, a_{n+2}$.

3. $a_{n+1}^2 = a_n\, a_{n+2}$.

Сумма n подряд стоящих членов прогрессии, начиная с a_1:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим по модулю единицы, ($|q| < 1$), называют *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*, имея при этом в виду, что ее общий член стремится к нулю. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия может быть убывающей (см. ниже пример 1), возрастающей (пример 3) и колеблющейся (пример 2).

Если знаменатель геометрической прогрессии по абсолютной величине меньше единицы ($|q| < 1$), то в выражении для суммы n первых членов прогрессии можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и найти сумму S образованного из членов геометрической прогрессии бесконечного числового ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Примеры:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}} \ldots, S = 2;$

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{(-2)^{n-1}}, \ldots, S = \frac{2}{3};$

3) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \ldots, -\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, S = -2.$

8. Логарифмы

Определение. *Логарифмом числа N по основанию a* называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить число N.

Обозначение: $x = \log_a N$.

Из определения логарифма следует:

$$a^x = N, \text{ т.е. } a^{\log_a N} = N.$$

Внимание!

При определении логарифма предполагают, что

$$a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0.$$

Свойства логарифмов.

1. Логарифм единицы при любом основании* равен нулю:

$$\log_a 1 = 0,\ 0 < a \neq 1.$$

2. Логарифмы чисел, меньших единицы, по основанию, большему единицы, а также чисел, больших единицы, по основанию, меньшему единицы, *отрицательны*. Формально это свойство можно записать так:

$$\text{если } \begin{cases} 0 < N < 1, \\ a > 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} N > 1, \\ 0 < a < 1, \end{cases} \text{ то } \log_a N < 0.$$

3. Логарифмы чисел, меньших единицы, по основанию, меньшему единицы, а также чисел, больших единицы, по основанию, большему единицы, *положительны*:

$$\text{если } \begin{cases} 0 < N < 1, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} N > 1, \\ a < 1, \end{cases} \text{ то } \log_a N > 0.$$

4. При основании, большем единицы, большему числу соответствует больший логарифм:

если $a > 1$ и $0 < N_1 < N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$.

5. При основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм:

если $0 < a < 1$ и $0 < N_1 < N_2$, то $\log_a N_1 > \log_a N_2$.

6. *Логарифм произведения* равен сумме логарифмов сомножителей:

если $N_1 > 0,\ N_2 > 0$, то

$$\log_a (N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2;$$

если $N_1 < 0,\ N_2 < 0$, то

$$\log_a (N_1 N_2) = \log_a (-N_1) + \log_a (-N_2);$$

в обоих случаях $0 < a \neq 1$.

---

* Говоря «при любом основании», здесь и дальше мы имеем в виду ограничения: $a > 0,\ a \neq 1$.

7. *Логарифм частного* равен разности логарифмов делимого и делителя:

если $N_1 > 0,\ N_2 > 0$, то

$$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2;$$

если $N_1 < 0,\ N_2 < 0$, то

$$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a(-N_1) - \log_a(-N_2);$$

в обоих случаях $0 < a \neq 1$.

8. *Логарифм степени* равен логарифму основания, умноженному на показатель степени:

если $N > 0$, то $\log_a N^m = m\log_a N$;

если $m = 2n$, то $\log_a N^{2n} = 2n\log_a|N|$;

в обоих случаях $0 < a \neq 1$.

9. *Логарифм корня* равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня:

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{\log_a N}{n},\ N > 0,\ 0 < a \neq 1,\ n \neq 0.$$

10. Зависимость между логарифмами с различными основаниями:

$$\log_a N = \frac{1}{\log_a b}\ \log_a\ N,\ 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1,\ N > 0.$$

Множитель $M = \dfrac{1}{\log_a b}$ называется *модулем* перехода от логарифмов при основании a к логарифмам при основании b.

11. Из свойства (10) вытекает:

$$\log_a b\ \cdot\ \log_b a = 1,\ \ 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1.$$

12. Значение логарифма не изменится, если число, от которого берется логарифм, и основание логарифма возвести в одну и ту же вещественную степень:

$$\log_a\ N = \log_{a^k} N^k,\ k \neq 0,\ N > 0,\ 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1,$$

где k — любое вещественное число.

13. Если отношение логарифмов двух чисел, вычислено при общем основании логарифмов, то это отношение есть величина постоянная для данных чисел и не зависит от выбора основания:

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2} = \frac{\log_b N_1}{\log_b N_2},\ N_2,\ N_2 > 0,\ 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1.$$

14. $\log_a N_1 \cdot \log_b N_2 = \log_a N_2 \cdot \log_b N_1,$

$$N_1,\ N_2 > 0,\ 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1.$$

В произведении логарифмов можно поменять местами либо основания логарифмов, либо выражения, стоящие под знаком логарифма.

Это непосредственно следует из предыдущего.

Пример 1. Вычислить $\log_3 125 \cdot \log_5 9$.

Пользуясь свойством 14, запишем

$$\log_3 125 \cdot \log_5 9 = \log_5 125 \cdot \log_3 9 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Пример 2. Вычислить

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9.$$

Пользуясь свойством 14, последовательно находим

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 =$$
$$= \log_4 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 =$$
$$= \log_4 4 \cdot \log_5 5 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 = \ldots$$
$$\ldots = \log_4 4 \cdot \log_5 5 \cdot \log_6 6 \cdot \log_7 7 \cdot \log_8 8 \cdot \log_3 9 = 2.$$

С помощью свойств 6 — 9 часто удается свести логарифм сложного выражения к результату простых действий над логарифмами входящих в него простых выражений.

Такое преобразование логарифма называется *логарифмированием*.

Пример 3. Найти логарифм выражения

$$A = \frac{a^5\ \sqrt[7]{c^3}}{d^4\ \sqrt[5]{fb^3}},\ \text{если } a,\ b,\ c,\ d,\ f > 0.$$

Применяя последовательно свойства 7, 6, 8, 9, получим

$$\log A = 5\log a + \frac{3}{7}\log c - 4\log d - \frac{1}{5}\log f - \frac{3}{5}\log b.$$

Преобразование, обратное логарифмированию, называется *потенцированием*.

При потенцировании свойства 6 — 9 следует читать «слева направо», т. е. правую часть равенства заменяют на его левую часть.

Десятичные логарифмы. За основание логарифмов в вычислениях обычно принимается число 10, так как мы пользуемся десятичной системой счисления. Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными*.

Обозначение: вместо $\log_{10} N$ пишут $\lg N$.

Десятичные логарифмы обладают всеми свойствами логарифмов с основанием, большим единицы, и, кроме того, следующими специальными свойствами:

1. Если число является степенью 10 с натуральным показателем n, то десятичный логарифм его равен показателю степени:

$$\lg 10^n = n.$$

2. Если число является степенью 0,1 с натуральным показателем n, то десятичный логарифм его отрицателен и равен $-n$:

$$\lg (0{,}1)^n = \lg 0{,}\,0\overbrace{\ldots}^{n-1}01 = n \lg 0{,}1 = -n.$$

3. Если число умножить на 10^n, то его логарифм увеличится на n:

$$\lg (10^n N) = n + \lg N.$$

4. Если число разделить на 10^n, то его логарифм уменьшится на n:

$$\lg \frac{N}{10^n} = \lg N - n.$$

Из свойств 3 и 4 следует: если в десятичной дроби перенести запятую на n знаков вправо, то логарифм *увеличится* на n; если перенести запятую на n знаков влево, то логарифм *уменьшится* на n.

5. Логарифмы рациональных чисел, не являющихся степенями 10 с целыми показателями, иррациональны.

Если действительное число не является целым, то его можно представить в виде суммы целого числа и положительного числа, меньшего единицы, например,

$$3{,}7 = 0{,}7 + 3; \quad -0{,}5 = -1 + 0{,}5; \quad -3{,}7 = -4 + 0{,}3.$$

Такое представление допускает и логарифм любого положительного числа N:

$$\lg N = A + d,$$

где A — целое, $0 \leqslant d < 1$.

Целая часть логарифма, записанного в такой форме, называется его *характеристикой*, а положительное число d — его *мантиссой*. При этом если характеристика отрицательна, то минус пишется над ней, например,

$$-0{,}5 = -1 + 0{,}5 = \bar{1}{,}5; \quad -3{,}7 = -4 + 0{,}3 = \bar{4}{,}3.$$

6. Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр в целой части числа:

$$\lg N = (n - 1) + d,$$

где n — число цифр в N, $0 \leqslant d < 1$.

7. Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей пишется в десятичном изображении этого числа до первой цифры, отличной от нуля, считая и нуль целых.

Мантиссы логарифмов сведены в таблицы логарифмов (см. табл. IX.2 в конце книги).

9. Комбинаторика. Бином Ньютона

Перестановки. Размещения. Сочетания. Комбинаторика рассматривает вопросы, связанные с подсчетом числа всевозможных комбинаций из элементов данного конечного множества.

Перестановки — комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Обозначения: P_n, $P(n)$ — число всех возможных перестановок из n элементов.

Если все n элементов различны, то число всех *перестановок без повторений* определяется формулой

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

($n!$ — символ для обозначения произведения n первых чисел натурального ряда. Читается «эн факториал». По определению полагают $0! = 1$).

Если среди n элементов имеется p элементов одного вида, q — другого, r — третьего и т. д., то число всех *перестановок с повторениями* определяется формулой

$$P_n(p, q, r, \ldots) = \frac{n!}{p!q!r!\ldots}.$$

Пример 1. Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если каждая из них входит в изображение числа только один раз?

Таких четырехзначных чисел будет ровно столько, сколько будет перестановок без повторений из четырех элементов:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1 и 2, если каждая из них входит в изображение числа дважды?

Таких чисел будет

$$P_4\,(2, 2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

Размещения из n элементов по k — комбинации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой; при этом два размещения считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

Обозначение: A_n^k — число всех размещений из n элементов по k.

Если среди n элементов нет одинаковых и повторения одного и того же элемента не допускаются, то число *размещений без повторений* определяется формулой

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!} =$$
$$= n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1).$$

Если все n элементов различны, но в размещениях допускаются повторения, то число *размещений с повторениями* определяется формулой

$$A_n^{k(\text{повт})} = n^k.$$

Пример 3. Число двузначных чисел, составленных из трех цифр 1, 2, 3 по две, без повторений равно

$$A_3^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6,$$

а с повторениями равно

$$A_3^{2(\text{повт})} = 3^2 = 9.$$

Сочетания из n элементов по k — комбинации по k элементов из данных n, отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом. Порядок расположения элементов не существенен.

Обозначения: C_n^k или $\binom{n}{k}$ — число всех сочетаний из n элементов по k.

Для k различных элементов из n различных

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

Для k с повторениями из n различных

$$C_n^{k(\text{повт})} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Для положительных целых n справедливы соотношения:

$$C_n^r = C_n^{n-r} \text{ при } r \leqslant n;$$

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1};$$

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_{n-1}^r + C_{n-2}^r + \ldots + C_r^r.$$

Соотношения между числом размещений, сочетаний и перестановок:

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Формула Ньютона (натуральная степень бинома). Используя свойства сочетаний, можно для целых положительных n получить формулу

$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 \pm \pm C_n^3 x^{n-3} a^3 + \ldots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 \pm \pm \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \ldots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Во второй и третьей формулах для симметрии мы определили

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Частные случаи:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2;$$
$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3;$$
$$(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Биноминальные коэффициенты $C_n^k = \binom{n}{k}$ легко можно определить с помощью *треугольника Паскаля*:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
. . . .

Каждый элемент нижней строки получается в результате сложения двух элементов верхней строки, стоящих левее и правее его. В качестве основы берется треугольник из единиц. Биноминальные коэффициенты записаны в строку. Второе число в строке есть степень бинома.

Свойства разложения по формуле Ньютона.

1. Члены разложения расположены по убывающим степеням буквы x (обычно это переменная) и по возрастающим степеням буквы a (обычно это параметр). Сумма показателей при x и a в каждом члене одинакова и равна n — показателю степени бинома.

2. Число членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

3. *Формула общего члена разложения* $(x + a)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k .$$

4. Коэффициенты членов разложения, равноудаленных от концов, равны между собой.

5. Сумма коэффициентов разложения $(x + a)^n$:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

6. Сумма коэффициентов разложения $(x - a)^n$:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} +$$

$$+(-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$$

7. Сумма коэффициентов членов разложения бинома $(x + a)^n$, находящихся на четных местах, равна сумме коэффициентов членов, находящихся на нечетных местах.

10. Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества — одно из основных понятий математики. Оно не может быть формально определено, и мы лишь поясняем это понятие, указывая на его свойства.

Определения. Действия над множествами.

1. Множество состоит из *элементов множества* или не содержит элементов.

Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, обозначается так:

$$a \in A.$$

2. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* или *нуль-множеством*.

Обозначение $\varnothing$.

3. Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B. По аналогии со знаками неравенства пишут

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

4. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е. а) каждый элемент множества A является элементом множества B; б) каждый элемент множества B является элементом множества A, то множества A и B называют *равными*: $A = B$.

Пустые множества также считают равными.

5. Все элементы, которые подлежат рассмотрению, собираются в так называемое *универсальное множество* I, так что для каждого множества A будет: $A \subset I$.

6. Для множеств определяются две операции: объединение $\cup$ и пересечение $\cap$.

Объединение (*сложение*) *множеств* A и B состоит в образовании из элементов множеств A и B множества $A \cup B$, в которое входит каждый элемент из A и каждый из B. Если элемент одновременно принадлежит и множеству A, и множеству B, то в $A \cup B$ он встречается только один раз.

Пересечение (*умножение*) *множеств* A и B есть множество $A \cap B$, состоящее из элементов, общих A и B. Другими словами, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда одновременно $x \in A$ и $x \in B$

7. $\overline{A}$ — *дополнение* множества A (относительно I) состоит из всех элементов I, не принадлежащих множеству A.

Некоторые свойства множеств. Приведем свойства множеств, вытекающие из предыдущих определений. Пусть A, B и С — любые множества, составленные из элементов множества I.

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$;

$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивность: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. $A \cup A = A$;

$A \cap A = A$.

5. Свойства I и $\varnothing$: $A \cap I = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

$$A \cup I = I; \quad A \cup \varnothing = A.$$

6. Свойства $\subset$, $\supset$: $A \subset (A \cup B)$; $A \subset I$;

$$(A \cap B) \subset A; \quad \varnothing \subset A.$$

Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$.

Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

7. Свойства $\overline{A}$: $\overline{A} \cup A = I$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap B$;

$$\overline{A} \cap A = \varnothing; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

8. Двойственность: $\cup$ и $\cap$,

$\varnothing$ и I,

$\subset$ и $\supset$.

Если в верном соотношении каждый из символов $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, I, $\subset$ и $\supset$ заменить соответственно на $\cap$, $\cup$, I, $\varnothing$, $\supset$ и $\subset$, то снова получим верное соотношение.

Алгебра символической логики. К алгебре множеств примыкают *алгебра символической логики* (*булева алгебра*) и *алгебра переключательных* (*коммутационных*) *схем*, которые интересны и сами по себе, и своими многочисленными применениями.

В математической логике под *высказыванием* понимают любое утверждение, которое может быть *истинным* либо *ложным*. Утверждения, которые могут быть одновременно истинными и ложными, а также лишь частично истинными, не рассматриваются. Высказывания в математической логике характеризуются только тем, истинны они или ложны без учета их конкретного содержания.

Таблица соответствия

Алгебра множеств	Математическская логика	Переключательные схемы
$\cup$ *объединение множеств*	$\vee$ *дизъюнкция (сложение) высказываний*	$+$ *параллельное включение*
$\cap$ *пересечение множеств*	$\wedge$ *конъюнкция (умножение) высказываний*	$\times$ *последовательное включение*
— *дополнение множества*	— отрицание высказываний	/ переключение (если было включено, то выключить, и наоборот)

Если высказывание A истинно, то пишут $A = 1$; если A ложно, то $A = 0$. Например, «Кама — приток Волги» = 1, «Миссисипи протекает в Австралии» = 0.

Основные логические операции

1. Дизъюнкция (логическое сложение) двух высказываний A и B есть сложное высказывание, обозначаемое $A \vee B$, которое ложно, если A и B оба ложны, и истинно во всех остальных случаях:

$$0 \vee 0 = 0; \quad 1 \vee 0 = 1;$$
$$0 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 1 = 1$$

(сравни с таблицей сложения в двоичной системе счисления на с. 14).

2. Конъюнкция (логическое умножение) двух высказываний A и B есть сложное высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания A и B истинны, и ложно во всех остальных случаях:

$$0 \wedge 0 = 0; \quad 1 \wedge 0 = 0;$$
$$0 \wedge 1 = 0; \quad 1 \wedge 1 = 1$$

(сравни с таблицей умножения в двоичной системе счисления на с. 14).

3. *Отрицание* высказывания A есть сложное высказывание, обозначаемое $\overline{A}$, которое ложно, когда $\overline{A}$ истинно, и истинно, когда $\overline{A}$ ложно:

$$\overline{1} = 0,$$
$$\overline{0} = 1.$$

4. *Равнозначность* двух высказываний A и B есть сложное высказывание, обозначаемое $A \sim$ B, которое истинно, если оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны, и ложно в остальных случаях:

$$0 \sim 0 = 1; \quad 1 \sim 0 = 0;$$
$$0 \sim 1 = 0; \quad 1 \sim 1 = 1.$$

Логическое сложение можно отождествить с союзом *или*, а умножение — с союзом *и*, так как в первом случае для истинности сложного высказывания требуется истинность одного из составляющих A ***или*** B (при этом A и B могут быть истинными одновременно), а во втором случае — обоих A ***и*** B. Отрицание отождествляется с частицей ***не***.

Между перечисленными логическими операциями существуют такие связи:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$
$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B};$$
$$A \sim B = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B) = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}).$$

Операции логического сложения и умножения и операция равнозначности являются коммутативными и ассоциативными. Кроме того, справедлив распределительный закон для логического умножения по отношению к логическому сложению:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

и логического сложения по отношению к логическому умножению:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Последний закон в обычной алгебре не имеет места; так,

$$3 + (2 \cdot 5) \neq (3 + 2)(3 + 5).$$

Принцип математической индукции. Для перехода от частных результатов, справедливых для отдельных значений n, к общим, верным при всех n, пользуются *принципом математической индукции*.

Имеется некоторое утверждение A, зависящее определенным образом от натурального аргумента n, который принимает все целые положительные значения, начиная с p.

Чтобы доказать справедливость утверждения A, поступают следующим образом:

1) убеждаются в справедливости A при $n = p$;

2) предполагают, что A верно при всех n, для которых $p < n \leqslant k$;

3) используя 1) и 2), доказывают, что утверждение A справедливо при $n = k + 1$.

Выполнение требований 1) — 3) позволяет от значения $n = p$, которое берется минимальным из всех возможных, шаг за шагом переходить к значениям $p + 1$, $p + 2$ и т.д. Поэтому мы считаем, что выполнение требований 1) — 3) влечет за собой справедливость утверждения A для всех $n > p$. Это одна из аксиом натуральных чисел. Она называется ***аксиомой индукции***.

Пример 1. Доказать, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

1) При $n = 1$ имеем

$$1 \cdot 1! = 2! - 1, \text{ т.е. } 1 = 1;$$

формула справедлива.

2) Предположим, что данная формула справедлива при всех n таких, что $1 \leqslant n \leqslant k$.

3) Докажем эту формулу для $n = k + 1$, т.е. установим, что верна формула

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1)\,(k + 1)! = (k + 2)! - 1,$$

которая получается из данной заменой n на $k + 1$.

Действительно,

$$(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k!) + (k + 1)\,(k + 1)! =$$
$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)\,(k + 1)! = (k + 1)!\,(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1.$$

В этой цепочке равенств при переходе от первого выражения ко второму использовано условие 2). Так как условия 1) и 3) выполнены, то в силу аксиомы индукции следует, что рассматриваемая формула верна при всех натуральных n.

Пример 2. Доказать тождество (***формулу Муавра***)

$$[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^{\,n}(\cos\, n\varphi + i\sin\, n\varphi).$$

1) Для $n = 1$ тождество очевидно.

2) Пусть оно верно при $1 \leqslant n \leqslant k$, в том числе

$$[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\,k} = r^{\,k}(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

3) Тогда

$$[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k\,+\,1} =$$
$$= [r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k\,[r\,(\cos 2\varphi + i\sin\varphi)] =$$
$$= (r^{\,k}(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)]\,[r\,(\cos\varphi + \sin\varphi)].$$

По правилу перемножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеем

$$[r\,(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)]\,[r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$$
$$= r^{\,k\,+\,1}\,[\cos\,(k + 1)\varphi + i\sin\,(k + 1)\varphi],$$

откуда следует доказываемая формула.

Пример 3. Доказать неравенство

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}}_{n\ \text{радикалов}} < \sqrt{a} + 1,$$

где $a > 0$, $n \geqslant 2$.

1) Здесь нужно начинать с $n = 2$:

$$\sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{(\sqrt{a} + 1)^2} = \sqrt{a} + 1.$$

2) Преподолжим, что неравенство верно для $2 < n \leqslant k$ в том числе и для $n = k$:

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}}_{n\ \text{радикалов}} < \sqrt{a} + 1.$$

3) Докажем тогда, что

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{k+1\ \text{радикалов}} < \sqrt{a}+1.$$

Используя 1) и 2), получим

$$\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a}+\ldots+\sqrt{a}}_{k}} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}+1\,.$$

Тем самым условия для применения индукции обеспечены.

Пример 4. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.

1) Минимальное число углов — три. Поэтому индукция начинается с $n = 3$. Для треугольника формула дает $\pi(3-2) = \pi$, т.е. она справедлива.

2) Допустим, что для любого выпуклого n-угольника с числом углов n, $3 < n \leqslant k$ формула имеет место.

3) Докажем ее для любого выпуклого $(k+1)$-угольника.

Возьмем три последовательные вершины A, B, C выпуклого $(k+1)$-угольника и проведем диагональ AC (рис. 21). Она разобьет $(k+1)$-угольник на k-угольник P и треугольник ABC, сумма внутренних углов которых равна сумме внутренних углов данного $(k+1)$-угольника.

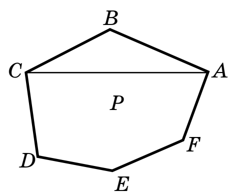


Рис. 21

Так как условия 1) и 2) выполнены, то

$$\pi(k-2)+\pi = \pi(k-1).$$

То же самое мы должны были бы получить из доказываемой формулы при подстановке в нее $n = k + 1$.

Замечание 1. Никакое число проверок не в состоянии заменить математическую индукцию.

Действительно, можно написать подряд любое (но конечное!) число множителей:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n);$$

перемножить их и предложить убедиться в том, что полученный многочлен имеет своими корнями все натуральные числа. Ясно, что простые подстановки не приведут к результату, если n выбрать достаточно большим.

Замечание 2. Все требования 1), 2) и 3) одинаково существенны. Особенно часто забывают про требование 1). Приведем пример такого ошибочного рассуждения. Докажем, например, что все натуральные числа равны. Предположим, что все числа до k равны, т.е. в том числе

$$k-1 = k.$$

Прибавив по единице к правой и левой частям равенства, получим

$$k = k+1.$$

Индукцию, однако, применять здесь было нельзя, так как не выполнено требование 1).

Аксиомы, теоремы, следствия. Построение каждой математической теории начинается с перечисления основных (начальных) элементов, понятий и операций, с указания их свойств и соотношений, которые заранее предполагаются выполненными. Эти свойства и соотношения называют *аксиомами*.

Точка, прямая, плоскость, пространство — основные элементы в геометрии; натуральное число, множество — в алгебре и математическом анализе.

Примеры аксиом.

1. Через две точки можно провести одну и только одну прямую.

2. Если A равно B, то B равно A.

3. Через точку вне прямой можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.

Последняя аксиома носит название ***пятого постулата Евклида***. Около двух тысяч лет математики безуспешно пытались вывести ее из остальных аксиом геометрии. Лишь в середине XIX века Н. И. Лобачевский нашел правильный путь к решению загадки «пятого постулата». Он принял противоположную аксиому:

«Через точку вне прямой проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной».

Исходя из этого утверждения Лобачевский построил новую геометрию, которая оказалась более общей.

Используя начальные элементы, понятия и операции, с помощью определений мы конструируем новые. Этот процесс продолжается далее, причем на каждом этапе используется все, что к этому моменту уже построено.

Примеры определений.

1. Действие, обратное умножению, называется *делением* (*отношением*).

2. Отношение двух (целых) чисел p и q ($q \neq 0$) называется *дробью*.

Законы логики позволяют из аксиом получать новые и новые утверждения — *теоремы* (*следствия*).

Вспомогательные теоремы иногда называют *леммами*.

Некоторые теоремы называют признаками, следствиями, критериями, предложениями.

Прямая и обратная теоремы. Необходимость и достаточность.

Любая теорема может быть записана в стандартной форме: «Если..., то...».

Утверждение, обозначенное многоточием после слова «если», мы назовем A, а обозначенное вторым многоточием назовем B. Итак, «Если A, то B». Здесь:

A — *условие теоремы*,
B — *заключение*.

Сама теорема может быть записана и так:

«Из A следует B»;
«A влечет B»;
$A \Rightarrow B$.

Примеры.

1. Если число делится на четыре, то оно четно.
2. Из делимости числа на четыре следует его четность.
3. Делимость числа на четыре влечет его четность.
4. Если прямые параллельны, то накрестлежащие углы равны.
5. Из параллельности прямых следует равенство накрестлежащих углов.
6. Параллельность прямых влечет равенство накрестлежащих углов.

Если $A \Rightarrow B$, то убедившись в выполнении A, мы можем утверждать, что имеет место и B. Условие (признак) A называется *достаточным* для выполнения B. Если условие A не выполнено, то относительно B мы ничего сказать не можем.

Делимость числа на четыре достаточна для его четности. Параллельность прямых достаточна для равенства накрестлежащих углов.

Если число не делится на четыре, то оно может быть как четным, так и нечетным (10, 14, 21, 33). Если прямые не параллельны, то накрестлежащие углы не равны.

Если $A \Rightarrow B$ и условие B не выполнено, то условие A не имеет места. В самом деле, если бы условие A соблюдалось, то из A следовало бы B, что невозможно. Условие B называется *необходимым* для выполнения A.

Предположим теперь, что условие B выполнено. Что можно сказать об условии A?

Оказывается, что тогда условие A может как выполняться, так и не выполняться. Когда нам удается наряду с теоремой $A \Rightarrow B$ доказать также теорему: «Если B, то A», т.е. $B \Rightarrow A$ (эта теорема называется *обратной* по отношению к рассмотренной вначале), то говорят, что *A эквивалентно B*, что A — *необходимое* и *достаточное условие* выполнения B и, обратно: B — необходимое и достаточное условие выполения A.

Примеры.

1. Если число четное, то оно может быть или кратным четырем, или нет.

2. Если накрестлежащие углы равны, то соответствующие прямые параллельны. (Это самостоятельная теорема, обратная приведенной ранее. Принимая во внимание обе эти теоремы (прямую и обратную), заключаем, что условие параллельности прямых и условие равенства накрестлежащих углов эквивалентны.)

3. Если число нечетное, то оно не делится на четыре.

4. Если накрестлежащие углы не равны, то прямые непараллельны.

5. Для того чтобы число делилось на четыре, необходима его четность.

6. Для параллельности прямых необходимо равенство накрестлежащих углов.

Рассматривают **четыре типа теорем:**

***Прямая теорема*:**

Если A, то B.

***Обратная теорема*:**

Если B, то A.

Теорема, противоположная прямой:

Если нет A, то нет B.

Теорема, противоположная обратной:

Если нет B, то нет A.

Прямая теорема и противоположная обратной являются следствиями друг друга; обратная теорема и противоположная прямой — тоже следствия друг друга.

Остальные пары теорем независимы.

III. ГЕОМЕТРИЯ

11. Плоские фигуры

11.1. Луч, отрезок, угол, ломаная

Определения. Основными неопределяемыми объектами геометрии являются:

точки, обычно обозначаемые A, B, C, ...;

прямые, обычно обозначаемые a, b, c, ..., AB;

плоскости, обычно обозначаемые α, β, γ, ... или А, В, Г, ..., (ABC).

В ряде случаев применяются и другие обозначения.

Луч (*полупрямая*) возникает при разбиении множества точек прямой a точкой O, принадлежащей этой прямой. Если точку O исключить, то прямая разобьется на два множества, называемых *открытыми лучами*. Если теперь добавить точку O к любому из образованных этой прямой открытых лучей, то получим луч.

Обозначение: Oa указывает прямую a, которой принадлежит луч, и точку O — начало луча; OA указывает начало луча O и произвольную точку A луча.

Лучи могут быть *сонаправленными* и *противоположно направленными*. Если лучи принадлежат одной прямой и их пересечение — луч, то они сонаправленные, иначе — противоположно направленные. Если лучи принадлежат параллельным прямым, то они лежат в одной плоскости, которую прямая, проведенная через начала O_1 и O_2 этих лучей, делит на две полуплоскости. Лучи, оказавшиеся в одной полуплоскости от прямой O_1O_2, называются сонаправленными, а лучи, попавшие в разные полуплоскости, — противоположно направленными.

Отрезок — множество всех точек прямой, лежащих между двумя точками этой прямой, включающее и сами эти точки.

Обозначение: AB. Точки A и B называются *концами отрезка*, остальные его точки — *внутренние точки отрезка*. Длина отрезка AB обозначается $|AB|$.

Отрезки равны, если равны их длины. Поэтому запись $AB = CD$ и запись $|AB| = |CD|$, вообще говоря, имеют одинаковый смысл.

Угол — пара лучей Oa и Ob, вообще говоря, различных, имеющих общее начало — точку O. Точка O называется *вершиной угла*, лучи Oa и Ob — его *сторонами*.

Обозначения: $\angle(a, b)$ — угол между прямыми a и b; $\angle AOB$ — точка A лежит на луче Oa, точка B лежит на луче Ob, точка O является вершиной угла.

Ломаная — последовательность отрезков (*звеньев* ломаной), расположенных так, что начало последующего совпадает с концом предыдущего, причем отрезки, имеющие общий конец, вообще говоря, не лежат на одной прямой. Отрезки, имеющие общий конец, называются *смежными звеньями ломаной*. Если конец последнего отрезка совпадает с началом первого, то ломаная называется *замкнутой*.

Ломаная называется *простой*, если любые ее точки, принадлежащие одновременно двум звеньям, являются концами соответствующих отрезков.

Простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области: *внутреннюю* и *внешнюю* по отношению к данной ломаной; во внешней области можно провести прямую, не имеющую с данной ломаной общих точек, — таков отличительный формальный признак внешней области.

Простая замкнутая ломаная вместе со своей внутренней областью образует *многоугольник*. Ломаная служит его *границей*, а внутренняя область ломаной — *внутренней областью многоугольника*. Звенья ломаной — *стороны* многоугольника, общие точки соседних звеньев — *вершины многоугольника*. В каждой вершине многоугольника две его стороны образуют *угол многоугольника*. Число вершин многоугольника совпадает с числом его сторон и с числом углов. По числу углов многоугольники называют треугольниками, четырехугольниками, пятиугольниками и т.д.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей одну из его сторон.

Измерение углов. Предположим, что в начальный момент лучи Oa и Ob совпадают, а затем луч Oa остается неподвижным, а луч Ob поворачивается вокруг точки O против часовой стрелки, зачерчивая пройденную часть плоскости. Чем большая часть плоскости зачерчена, тем больше возникший в результате угол. Когда лучи Oa и Ob окажутся противоположно направленными и будет зачерчена только часть плоскости по одну сторону от прямой, то говорят, что лучи Oa и Ob образуют *развернутый* угол. Когда лучи Oa и Ob вновь окажутся сонаправленными, т. е. луч Ob совершит один полный оборот вокруг точки O, то угол между ними называют *полным*. Можно рассматривать углы, содержащие один или несколько полных углов.

Градусная мера:

Градус ($^\circ$) — $^1/_{360}$ полного угла.

Минута ($'$) — $^1/_{60}$ градуса.

Секунда ($''$) — $^1/_{3600}$ градуса, $^1/_{60}$ минуты.

Полный оборот (полный угол) составляет 360°.

Запись

$$57^\circ\ 17'\ 45''$$

означает 57 градусов 17 минут 45 секунд.

Радианная мера.

Радиан (рад) — угол, длина дуги которого равна радиусу. В полном обороте содержится 2π радианов.

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\ 17'\ 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}01745 \text{ рад}.$$

$$1' = \frac{\pi}{10800} \text{ рад} = 0{,}0002909 \text{ рад}.$$

$$1'' = \frac{\pi}{648\,000} \text{ рад} = 0{,}000004848 \text{ рад}.$$

Переход от градусного измерения к радианному выполняется по формуле

$$\varphi \text{ рад} = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ}.$$

Градусную, радианную или какую-либо иную меру угла называют *величиной угла*. Иногда для обозначения величины угла AOB пишут $\widehat{AOB}$ или сохраняют то же обозначение, что и для самого угла, если это не может вызвать путаницы. Часто для обозначения угла и его величины пользуются одной и той же буквой.

Классификация углов.

Таблица III.1

Название угла	Определение угла
Прямой	Угол в $^1/_4$ полного оборота равен $\frac{\pi}{2} = d = 90^\circ$. Прямые, образующие прямой угол, называются *перпендикулярными*
Развернутый	Угол в $^1/_2$ полного оборота равен $\pi = 2d = 180^\circ$, его стороны образуют одну прямую
Полный	Угол в 360° равен $2\pi = 4d$
Острый	Угол, меньший прямого
Тупой	Угол, больший прямого, но меньший развернутого
Смежные	Углы, имеющие общую сторону и образующие в сумме развернутый угол
Вертикальные	Углы, образованные двумя пересекающимися прямыми и не имеющие общих сторон. Вертикальные углы равны
Дополнительные	Углы, в сумме равные прямому

Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине этого угла, делящий угол пополам. Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение одна другой. Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

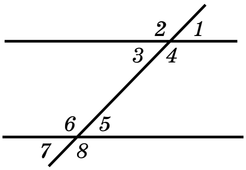


Рис. 22

Углы при параллельных прямых. Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой образуются восемь углов. Углы *1* и *5*, *2* и *6*, *3* и *7*, *4* и *8* называются *соответственными* (рис. 22). В каждой паре соответственные углы равны. Углы *3* и *5*, *4* и *6* — *внутренние накрестлежащие*; *1* и *7*, *2* и *8* — *внешние накрестлежащие*. В каждой паре накрестлежащие углы равны.

Углы *3* и *6*, *4* и *5* — *внутренние односторонние*; *1* и *8*, *2* и *7* — *внешние односторонние*. Каждая пара односторонних углов в сумме равна 180°.

Углы с соответственно параллельными или соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо в сумме составляют 180°.

11.2. Треугольник

Обозначения. Основные свойства (рис. 23).

Обозначения: A, B, C — *вершины* треугольника; a, b, c — *стороны*; α, β, γ — *внутренние углы*; α_1, β_1, γ_1 — *внешние углы*; $a + b + c = 2p$ — *периметр* (p — *полупериметр*); S — *площадь треугольника*.

Свойства треугольника:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = 2d = \pi;$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360° = 4d = 2\pi;$$

$$\alpha_1 = \beta + \gamma; \quad \beta_1 = \alpha + \gamma; \quad \gamma_1 = \alpha + \beta.$$

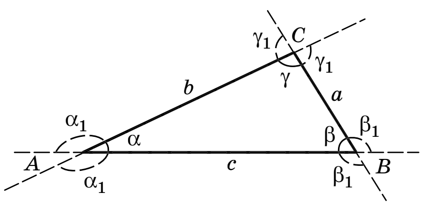


Рис. 23

Неравенства треугольника:

$$a + b > c, \quad |a - b| < c,$$
$$b + c > a, \quad |b - c| < a,$$
$$a + c > b, \quad |a - c| < b.$$

Треугольник называется *остроугольным*, если все углы его острые, т.е. меньше 90°; *прямоугольным*, если один угол прямой; *тупоугольным*, если один угол тупой. В треугольнике может быть только один прямой или тупой угол.

Высота, медиана, биссектриса. *Высота* h_a (или h_b, или h_c) — отрезок AA_1 (или BB_1, или CC_1) перпендикуляра, опущенного из вершины A (или B, или C) на противоположную сторону BC (или AC, или AB) или на ее продолжение (рис. 24):

$$h_a = \frac{2S}{a}; \;\; h_b = \frac{2S}{b}, \; h_c = \frac{2S}{c},$$

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab.$$

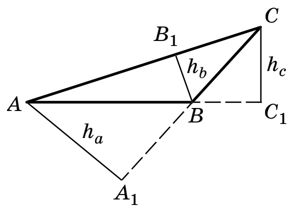


Рис. 24

Медиана m_a (или m_b, или m_c) — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны (рис. 25):

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}; \; m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2};$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

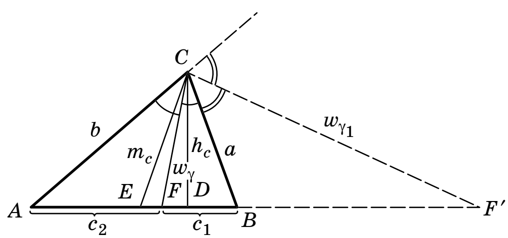


Рис. 25

Биссектриса w_α (или w_β, или w_γ) — отрезок биссектрисы соответствующего угла, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной (см. рис. 25). Биссектриса угла γ делит сторону c на отрезки c_1 и c_2, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a};$$

$$w_\alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Формулы для w_β и w_γ получаются циклической перестановкой a, b, и c, т.е. a заменяют на b, b заменяют на c, а c — на a.

Биссектриса внешнего угла w_{α_1} (или w_{β_1}, или w_{γ_1}) — отрезок биссектрисы соответствующего угла от вершины до продолжения противоположной стороны треугольника:

$$w_\alpha = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-c)(p-b)}.$$

Формулы для w_{β_1} и w_{γ_1} получаются циклической перестановкой a, b, c.

В каждом треугольнике биссектриса любого внутреннего угла лежит между медианой и высотой. Угол между высотой h_c и биссектрисой w_γ равен $\frac{\beta-\alpha}{2}$. Угол между h_c и w_{γ_1} равен $90° - \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Все биссектрисы и все медианы всегда проходят внутри треугольника. Две высоты тупоугольного треугольника проходят вне его (см. рис. 24).

Вписанная и вневписанная окружности (рис. 26). Биссектрисы углов α, β, γ пересекаются в одной точке O — центре *вписанной* (т.е. касающейся всех сторон треугольника) окружности; r — ее радиус.

Биссектрисы внешних углов треугольника пересекаются в точках O_a, O_b, O_c — центрах вневписанных окружностей. Через эти же точки проходят продолжения соответствующих биссектрис внутренних углов; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей.

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{2S}{b+c-a}; \quad r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{2S}{a+c-b};$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{2S}{a+b-c};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}; \quad \frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b};$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};$$

$$AD = p - a, \quad AE = p.$$

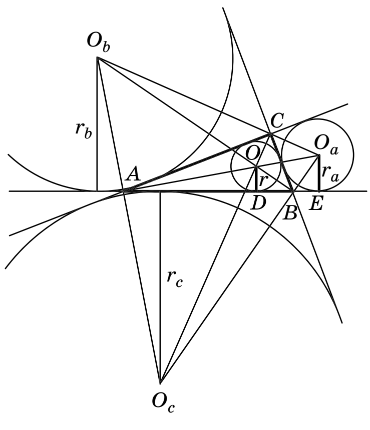


Рис. 26

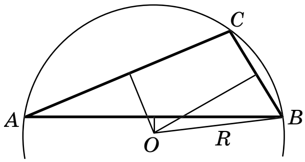


Рис. 27

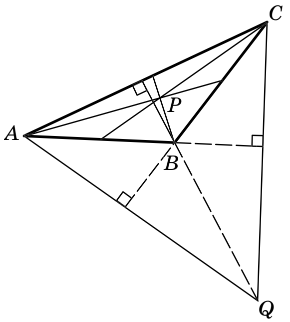


Рис. 28

Описанная окружность (рис. 27). Перпендикуляры, восставленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке O — центре *описанной* окружности (т.е. окружности, проходящей через все вершины треугольника); R — ее радиус:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r_a + r_b + r_c = 4R.$$

Центр масс, ортоцентр. Три медианы пересекаются в одной точке P (рис. 28), являющейся *центром масс* треугольника. Точка P делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (больший отрезок прилегает к вершине).

Три высоты пересекаются в точке Q, называемой *ортоцентром*.

Площадь треугольника.

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (\textbf{\textit{формула Герона}})};$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \quad S = rp = \frac{1}{2}r(a+b+c);$$

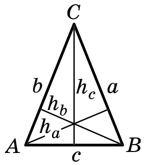
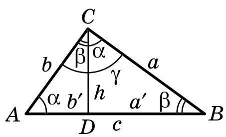
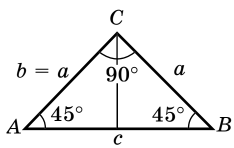
$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c);$$

$$S^2 = r\,r_a r_b r_c;$$

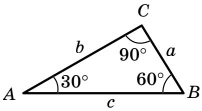
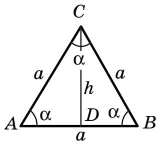
$$S = \frac{1}{2}(a+b)w_\gamma \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Частные случаи треугольников. Они приведены в табл. III.2.

Таблица III.2

<table>
<tr><th>Треугольник</th><th>Определения, обозначения</th><th>Свойства и соотношения</th></tr>
<tr><td>Равнобедренный

</td><td>$a = b$
a, b — боковые стороны,
c — основание</td><td>$\alpha = \beta$ (углы при основании равны); $h_c = m_c = w_\gamma$ (высота, медиана и биссектриса, пересекающие основание, совпадают)
$$h_a = h_b = \frac{2S}{a};$$
$$h_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2};$$
$$S = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2};$$
$$R = \frac{a^2}{2h_c};\ \gamma = \frac{c(2a - c)}{4h_c};$$
$$r_c = \frac{c(2a + c)}{2h_c}$$</td></tr>
<tr><td>Прямоугольный

</td><td>$\gamma = 90°$
a, b — катеты
c — гипотенуза
h — высота
a' — проекция a на c
b' — проекция b на c</td><td>$a^2 + b^2 = c^2$ (***теорема Пифагора***); $\alpha + \beta = 90°$. Треугольники ADC, DBC и ABC подобны (у них равны по два угла при гипотенузе).
$a^2 = ca'$, $b^2 = cb'$, $h^2 = a'\,b'$,
$$S = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}.$$
Центр масс отстоит от сторон a, b и c на расстоянии
$$\frac{1}{3}b,\ \frac{1}{3}a \text{ и } \frac{1}{3}h$$
соответственно;
$$m_c = \frac{1}{2}c = R$$</td></tr>
<tr><td>Равнобедренный прямоугольный

</td><td>$a = b$
$\gamma = 90°$</td><td>$$a = b = \frac{c}{\sqrt{2}};\ h = \frac{c}{2};$$
$$S = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2};$$
$$\alpha = \beta = 45°$$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. III.2

Треугольник	Определения, обозначения	Свойства и соотношения
Прямоугольный с углом 30° 	$\gamma = 90°$ $\alpha = 30°$	$\beta = 60°;\ a = \dfrac{c}{2}$; $b = \dfrac{c\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; $S = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{6}$
Равносторонний 	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 60°$; $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

11.3. Четырехугольник

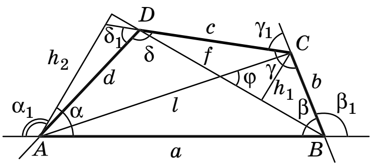


Рис. 29

Обозначения. Основные свойства (рис. 29).

Обозначения: a, b, c, d — стороны; α, β, γ, δ — внутренние углы; α_1, β_1, γ_1, δ_1 — внешние углы; $a + b + c + d = 2p$ — периметр (p — полупериметр); φ — угол между диагоналями; S — площадь; ψ — полусумма противоположных углов.

Свойства:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°; \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360°.$$

Диагональ (l, f) — отрезок, соединяющий противоположные вершины; h_1, h_2 — высоты, опущенные на одну диагональ.

Площадь четырехугольника:

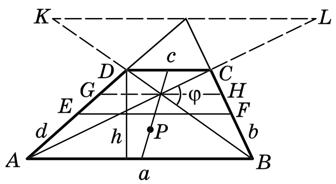
$$S = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)f = \frac{1}{2}lf\sin\varphi =$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} - abcd\cos^2\varphi;$$

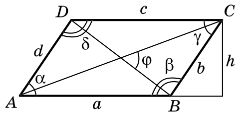
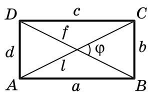
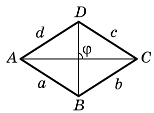
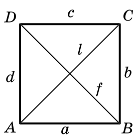
$$S^2 = \frac{1}{16}(2lf + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2lf - a^2 - c^2 + b^2 + d^2).$$

Частные случаи четырехугольников. Они приведены в табл. III.3.

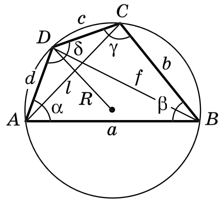
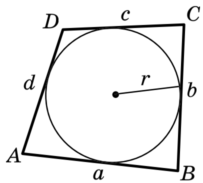
Таблица III.3

Фигура	Определения, обозначения	Свойства и соотношения
Трапеция 	$c \parallel a$ c, a — основания, $c < a$ b, d — боковые стороны, (Остальные обозначения те же, что для четырехугольника)	*Средняя линия* m (отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = \dfrac{a+c}{2}$; $S = mh = \dfrac{a+b}{2}h = \dfrac{1}{2}lf\sin\varphi$; $l = ac + \dfrac{d^2a - b^2c}{a-c}$; $f = ac + \dfrac{b^2a - d^2c}{a-c}$; $S = \dfrac{a+c}{a-c}\sqrt{(p-a)(p-c)(p-c-d)(p-c-b)}$. Центр масс лежит на отрезке, соединяющем середины оснований на расстоянии $\dfrac{h}{3}\dfrac{a+2c}{a+c}$ от нижнего основания; $GH = \dfrac{2ac}{a+c}$; $KL = \dfrac{2ac}{a-c}$;
Равнобочная трапеция	$c \parallel a$, $b = d$, $c < a$	$l = f = ac + b^2$; $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$; $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$

Продолжение табл. III.3

Фигура	Определения, обозначения	Свойства и соотношения
Параллелограмм 	$a \parallel c$, $b \parallel d$	$a = c$, $b = d$; $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$ Диагонали, пересекаясь, делятся пополам, точка пересечения диагоналей — центр масс. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2 = l^2 + f^2$ (сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей) $S = ab \sin \alpha = ah = \frac{1}{2} lf \sin \varphi$
Прямоугольник 	$a \parallel c$, $b \parallel d$ $\alpha = 90°$	$a = c$, $b = d$, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$; $l = f$ (диагонали равны); $S = ab = \frac{1}{2} l^2 \sin \varphi$
Ромб 	$a \parallel c$, $b \parallel d$, $a = b$	$a = b = c = d$ (все стороны равны); $\varphi = 90°$ (диагонали пересекаются под прямым углом; $S = \frac{1}{2} lf = a^2 \sin \alpha$ (α — угол ромба)
Квадрат 	$a \parallel c$, $b \parallel d$ $a = b$, $\alpha = 90°$	Все стороны равны и все углы прямые. $l = f = a\sqrt{2}$, $S = a^2 = \frac{1}{2} l^2$

Продолжение табл. III.3

Фигура	Определения, обозначения	Свойства и соотношения
Четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями	$l \perp f$	$S = \dfrac{lf}{2}$
Вписанный четырехугольник 	Вершины лежат на одной окружности	$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; $ac + bd = lf$ (***теорема Птолемея***); R —радиус описанной окружности: $R = \dfrac{1}{4S}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$; $l = \sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$; $f = \sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$
Описанный четырехугольник 	Все стороны касаются одной окружности	$a + c = b + d$; $S = rp$

11.4. Многоугольник

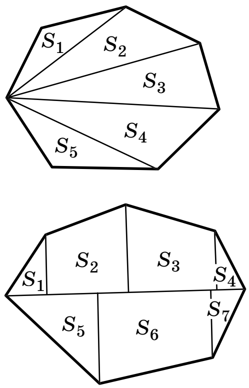


Рис. 30

Основные свойства. Сумма внутренних углов равна $180° (n - 2)$. Сумма внешних углов равна $360°$.

Диагональ выпуклого многоугольника — отрезок, соединяющий две вершины n-угольника, не принадлежащие общей стороне.

Число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Площадь n-угольника вычисляется как сумма S_k площадей треугольников или трапеций, на которые он разбивается (рис. 30): $S = \Sigma S_k$.

Правильные многоугольники. *Правильным* называется выпуклый многоугольник, все стороны и углы которого равны.

Обозначения: c_n — сторона правильного n-угольника; c_{2n} — сторона правильного $2n$-угольника; R — радиус описанной окружности; r_n — радиус вписанной окружности (апофема); α — внутренний угол; α'_n — внешний угол; S_n— площадь; d — диагональ; h — высота.

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°;\ \alpha'_n = \frac{360°}{n};\ \alpha_n + \alpha'_n = 180°;$$

$$r_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c_n^2};$$

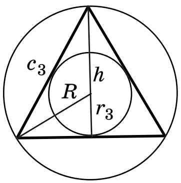
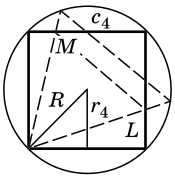
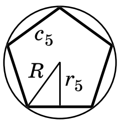
$$c_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - c_n^2}};\quad c_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2Rr_n};$$

$$S_n = \frac{nc_n r_n}{2} = \frac{nc_n\sqrt{4R^2 - c_n^2}}{4} = \frac{nR^2}{2}\sin\alpha'_n.$$

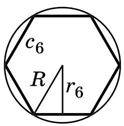
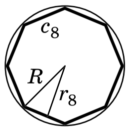
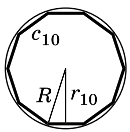
Около правильного многоугольника можно описать окружность, центр которой одновременно является центром вписанной окружности и центром масс n-угольника.

Соотношения в правильных многоугольниках. Они приведены в табл. III. 4.

Таблица III.4

Правильный многоугольник	Сторона, угол	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности (апофема)	Площадь
Треугольник 	$c_3 = R\sqrt{3}$; $h = \frac{c_3}{2}\sqrt{3} = \frac{3R}{2} = 3r_3$; $\alpha_3 = 60°$; $\alpha'_3 = 120°$	$R = \frac{c_3\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}h = 2r_3$	$r_3 = \frac{R}{2} = \frac{c_3\sqrt{3}}{6} = \frac{h}{3}$	$S_3 = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} = \frac{c_3^2}{4}\sqrt{3} =$ $= \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = 3r_3^2\sqrt{3}$
Квадрат 	$c_4 = R\sqrt{2}$; $\alpha_4 = \alpha'_4 = 90°$	$R = \frac{c_4}{2}\sqrt{2} = r_4\sqrt{2}$ $ML = R(\sqrt{3} - 1)$	$r_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{c_4}{2}$	$S_4 = 2R^2 = c_4^2 = 4r_4^2$
Пятиугольник 	$c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} =$ $= 2r_5\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$; $\alpha_5 = 108°$; $\alpha'_5 = 72°$	$R = \frac{c_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} =$ $= r_5(\sqrt{5} - 1)$	$r_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1) =$ $= \frac{c_5}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$S_5 = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$ $= \frac{c_5^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} =$ $= 5r_5^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

Продолжение табл. III.4

Правильный многоугольник	Сторона, угол	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности (апофема)	Площадь
Шестиугольник 	$c_6 = R = \frac{2}{3} r_6 \sqrt{3}$; $\alpha_6 = 120°$; $\alpha'_6 = 60°$	$R = c_6$	$r_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{c_6\sqrt{3}}{2}$	$S_6 = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} c_6^2 \sqrt{3} =$ $= 2 r_6^2 \sqrt{3}$
Восьмиугольник 	$c_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} =$ $= 2r_8(\sqrt{2} - 1)$; $\alpha_8 = 135°$; $\alpha'_8 = 45°$	$R = \frac{c_8}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} =$ $= r_8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} =$ $= \frac{c_8}{2}(\sqrt{2} + 1)$	$S_8 = 2R^2\sqrt{2} =$ $= 2c_8^2(\sqrt{2}+1) =$ $= 8r_8^2(\sqrt{2} - 1)$
Десятиугольник 	$c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) =$ $= \frac{2r_{10}}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$; $\alpha_{10} = 144°$; $\alpha'_{10} = 36°$	$R = \frac{c_{10}}{2}(\sqrt{5} + 1) =$ $= \frac{r_{10}}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$	$r_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$ $= \frac{c_{10}}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$S_{10} = \frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} =$ $= \frac{5}{2}c_{10}^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} =$ $= 2r_{10}^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

11.5. Круг

Элементы круга.

Окружность — замкнутая кривая, все точки которой равноудалены от некоторой фиксированной точки O на расстояние $r \neq 0$.

Центр — точка O (см. окружность).

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

Радиус — отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности (обозначается r, R).

Секущая — прямая, проходящая через две точки M и N окружности ($M \neq N$).

Хорда — отрезок MN, соединяющий две точки M и N окружности ($M \neq N$).

Диаметр — хорда, проходящая через центр (обозначается d, D). Диаметр равен двум радиусам ($D = 2R$).

Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. (Построение см. задачу **11** на с. 173).

Сегмент — часть круга, отсекаемая хордой.

Стрелка дуги, *Высота сегмента* — отрезок радиуса от середины хорды.

Сектор — часть круга, ограниченная двумя радиусами.

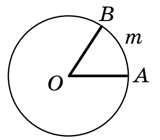
Концентрические окружности — окружности с общим центром.

Кольцо — часть плоскости между двумя концентрическими окружностями.

Углы и окружность.

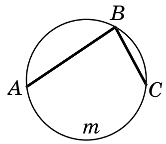
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \smile AmB.$$



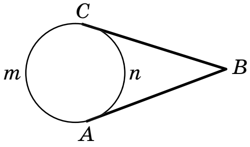
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AmC.$$



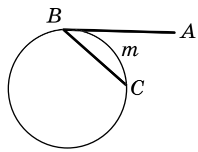
Описанный угол (угол между двумя касательными) измеряется полуразностью образованных им дуг:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC - \smile AnC).$$



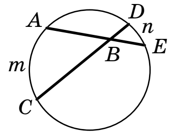
Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile BmC.$$



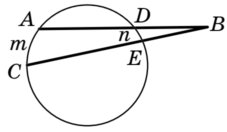
Угол между двумя хордами AE и CD измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC + \smile EnD).$$



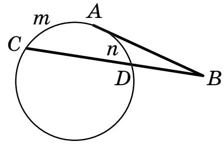
Угол между секущими измеряется полуразностью заключенных между ними дуг:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC - \smile EnD).$$



Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых дуг, прилежащих к касательной:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC - \smile AnD).$$

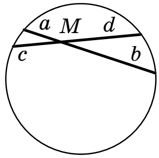


Пропорциональные отрезки.

M — точка внутри круга, через которую проведены две хорды:

$$ab = cd,$$

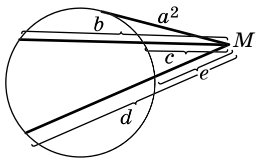
т. е. произведение отрезков хорды, на которые делит ее точка M — величина постоянная для точки M.



M — точка вне круга, из которой проведены касательная и две секущие:

$$a^2 = bc = de,$$

т. е. квадрат касательной, проведенной из точки M, к данной окружности равен произведению длины любой секущей, проведенной к этой окружности из этой же точки M, на длину внешней части этой же секущей.



Соотношения в окружности и круге. Отношение длины C окружности к ее диаметру D есть величина постоянная, равная 3,14159 ... . Это число иррациональное, оно обозначается греческой буквой π. Отсюда имеем

$$C = 2\pi R = \pi D.$$

Длина дуги окружности:

$$C' = \frac{\pi R\varphi}{180^\circ} \quad (\varphi \text{ — в градусах});$$

$$C' = R\varphi \ (\varphi \text{ — в радианах}).$$

Длина хорды: $l = 2\sqrt{hR - h^2}$ (h — стрелка).

Высота сегмента (стрелка): $h = R - \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$.

Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{RC}{2}$ (C — длина окружности).

Площадь сектора: $S = \frac{RC}{2} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360^\circ}$ (φ — в градусах, C — длина дуги).

Площадь кольца: $S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$ (r и d относятся к меньшей окружности).

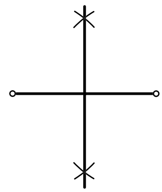
Площадь кольцевого сектора: $S = \pi\frac{\varphi(R^2 - r^2)}{360°}$ (φ — в градусах).

Площадь сегмента: $S = \frac{R(C - a) + ah}{2}$($C$ — длина дуги; a — хорда; h — стрелка).

12. Задачи на построение

12.1. Элементарные построения

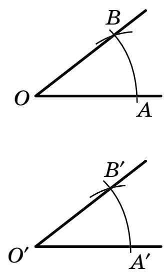
1. Перпендикуляр к отрезку в его середине.



Одинаковым раствором циркуля проводим дуги с центрами в концах отрезка так, чтобы эти дуги пересекались. Прямая, проходящая через точки пересечения засечек, — искомый перпендикуляр.

---

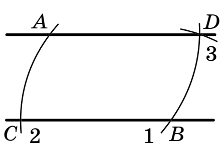
2. Угол, равный данному. На луче O′A' построить угол, равный данному углу AOB.



Данный угол AOB «измеряем» дугой AB произвольного радиуса R с центром в точке O и расстоянием a между точками A и B. Далее проводим дугу радиуса R с центром в вершине O' данного луча $O'A'$, а из точки A' раствором циркуля радиуса a делаем засечку на дуге. Угол $A'O'B'$ искомый.

---

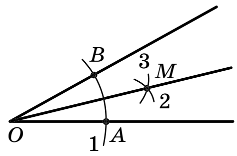
3. Прямая, параллельная данной. Через точку A провести прямую, параллельную данной прямой.



Описываем дугу произвольного радиуса, но большего расстояния точки A от данной прямой, с центром в точке A; B — точка пересечения дуги и прямой. Тем же радиусом описываем дугу с центром в точке B. На первой дуге из точки B раствором циркуля радиуса AC делаем засечку и получаем точку D. Прямые AD и BC параллельны.

4. Биссектриса угла. Разделить данный угол пополам.

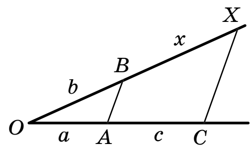
Из вершины O произвольным радиусом проводим дугу AB. Из точек A и B достаточно большим радусом (например, AB) делаем засечки. Точка M пересечения засечек лежит на биссектрисе.



---

5. Четвертый пропорциональный отрезок. По данным отрезкам a, b, c построить отрезок x такой, что $a : b = c : x$.

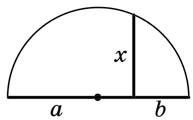
На одной стороне произвольного угла откладываем отрезки a и c, а на другой — отрезок b. Через точку C проводим прямую, параллельную AB (см. задачу 3). Отрезок $BX = x$ — искомый.



---

6. Средний пропорциональный отрезок. По двум отрезкам a и b построить отрезок x такой, что $a : x = x : b$.

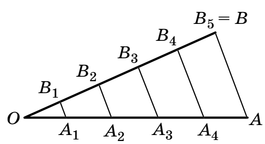
На отрезке, равном сумме a и b, как на диаметре строим окружность. (Для этого делим отрезок пополам, используя решение задачи 1.) Перпендикуляр x будет искомым отрезком.



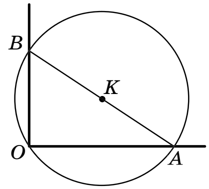
---

7. Деление отрезка на равные части.

Под некоторым углом к данному отрезку проводим луч и откладываем на нем столько равных отрезков OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., на сколько частей нужно разделить OA. Соединяем последнюю точку B с точкой A. Через B_1, B_2, B_3, ... проводим прямые, параллельные AB (см. задачу 3). A_1, A_2, A_3, ... — искомые точки деления.



8. Перпендикуляр в конце луча.

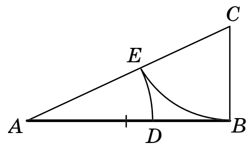


К данному лучу OA, не продолжая его, восставить перпендикуляр в точке O.

Возьмем вне луча какую-либо точку K так, чтобы окружность с центром в точке K и радиусом OK пересекала луч OA в некоторой точке A. Через точку A проведем диаметр AB. OB — искомый перпендикуляр.

---

9. Золотое сечение. Разделить отрезок $AB = a$ в среднем и крайнем отношениях:



$$a : x = x : (a - x).$$

Пропорция приводит нас к квадратному уравнению с единственным положительным корнем

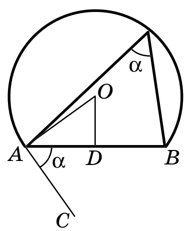
$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Строим отрезок CB, перпендикулярный AB и равный $\frac{a}{2}$:

$CE = \frac{a}{2}$; $AD = AE = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ — искомая величина.

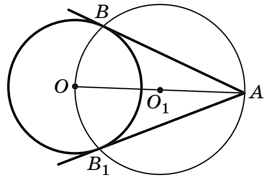
---

10. Сегмент, вмещающий данный угол. На данном отрезке построить сегмент, все вписанные углы которого, опирающиеся на AB, равны α.



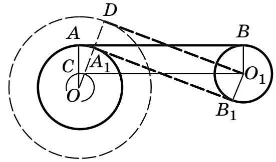
Строим угол BAC, равный α, с вершиной в точке A (AB — сторона этого угла). Центр O искомого сегмента — пересечение перпендикуляра OD к середине отрезка AB и перпендикуляра OA к стороне AC угла BAC (см. задачу 8).

11. Касательная к окружности. Через точку A вне окружности провести внешнюю касательную к окружности.



На отрезке OA как на диаметре строим окружность с центром в точке O_1. Точки B и B_1 лежат на касательных.

12. Общая касательная к двум окружностям.

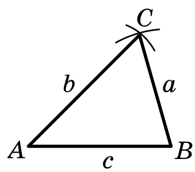


Можно построить две внешние касательные (обе окружности лежат по одну сторону) и две внутренние (окружности лежат по разные стороны — на рисунке показаны штриховой линией).

Строим окружность с центром в точке O и радиусом, равным разности (для внутренней касательной — сумме) радиусов данных окружностей. К построенной окружности проводим касательную O_1C (соответственно O_1D). Касательные AB и A_1B_1 параллельны соответственно O_1C и O_1D. Две другие касательные симметричны относительно OO_1.

12.2. Построение треугольника

13. По трем сторонам.



Из концов отрезка AB, равного одной из сторон треугольника, делаем засечки радиусами, равными двум другим сторонам.

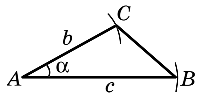
Задача имеет решение, если данные отрезки удовлетворяют неравенствам треугольника (см. с. 125):

$$|b-a| < c < a+b,\ |c-b| < a < b+c,$$
$$|a-c| < b < c+b.$$

14. По двум сторонам и углу между ними.

Построив угол BAC, равный данному, откладываем на его сторонах два данных отрезка.

Задача имеет решение всегда.

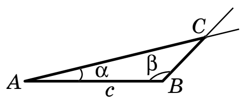


---

15. По стороне и прилежащим к ней углам.

При каждом из концов отрезка AB, равного данной стороне, строим по одному данному углу.

Задача имеет решение, если один из углов острый.

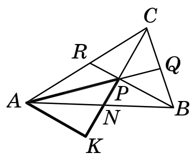


---

16. По трем медианам.

Если медиану CN продолжить на отрезок NK, равный PN, то получим треугольник APK, каждая из сторон которого равна $^2/_3$ соответствующей медианы.

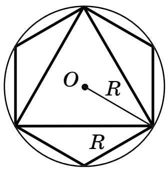
Задача сводится к задаче 3.



12.3. Построение правильных многоугольников

17. Треугольник и шестиугольник.

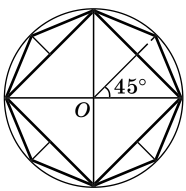
Сделав на окружности последовательные засечки радиусом R, получим шесть вершин правильного шестиугольника. Соединяя вершины через одну, построим правильный треугольник.



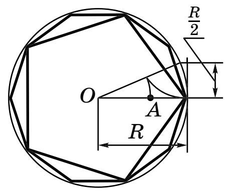
---

18. Квадрат и восьмиугольник.

Два взаимно перпендикулярных диаметра пересекают окружность в вершинах квадрата. Повернув диаметры на 45° (или разделив углы между ними пополам), получим восемь точек, являющиеся вершинами правильного восьмиугольника.



19. Пятиугольник и десятиугольник. Разделив радиус в среднем и крайнем отношении (см. задачу 9), получим отрезок OA, равный стороне правильного вписанного десятиугольника. Соединяя вершины десятиугольника через одну, построим правильный пятиугольник.



13. Геометрические преобразования

При решении геометрических задач используются геометрические преобразования: параллельный перенос, симметрия, подобие.

Параллельный перенос. На плоскости задано направление NN'. Говорят, что фигура F' получается из фигуры F *параллельным переносом* в направлении NN' на расстояние a (рис. 31), если каждая точка A' фигуры F' отстоит от соответствующей точки A фигуры F на расстоянии a и прямая $AA' \parallel NN'$.

Два последовательных параллельных переноса дают «в сумме» новый параллельный перенос.

Параллельный перенос переводит прямую l в параллельную ей прямую l', а окружность — в равную ей окружность.

Пример 1. Два завода A и B разделены рекой ширины d, берега которой параллельны. В каком месте следует построить мост, перпендикулярный берегам реки, чтобы путь из A в B был кратчайшим?

Если путь $AMNB$ — кратчайший, то, перенеся отрезок MN параллельно самому себе вдоль AM (рис. 32), видим, что путь $AN'NB$ имеет

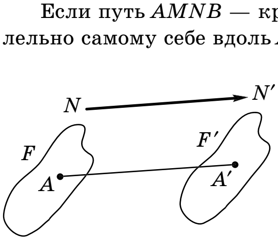


Рис. 31

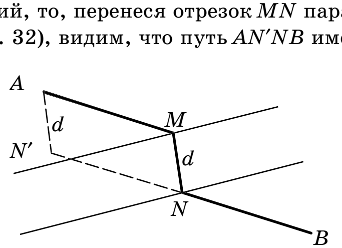


Рис. 32

ту же длину. Отсюда простое построение: откладываем отрезок AN', перпендикулярный берегам реки и равный d; точка N пересечения отрезка $N'B$ с дальним от N' берегом реки — конец искомого моста. Проведя $AM \parallel NB$, найдем точку M (второй конец моста).

Пример 2. Построить трапецию по основаниям a и c ($a > c$) и боковым сторонам b и d.

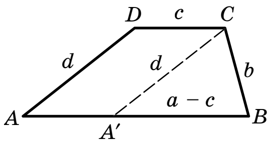


Рис. 33

Предположим, что трапеция $ABCD$ со сторонами a, b, c, d построена (рис. 33). Перенесем сторону AD трапеции параллельно самой себе в положение $A'C$ и получим треугольник $A'BC$ с тремя известными сторонами b, d, $a - c$.

Строим треугольник $A'BC$ по трем сторонам $a - c$, b, d (см. задачу 13). На продолжении стороны $A'B$ откладываем отрезок AA' длиной c. Из точек A и C проводим прямые, параллельные соответственно $A'C$ и AB, точка пересечения которых — вершина D.

Задача имеет решение, если отрезки d, b и $a - c$ удовлетворяют неравенствам треугольника.

Осевая симметрия. Точка A' называется *симметричной точке A относительно прямой l* (оси симметрии), если отрезок AA' перпендикулярен прямой l и делится ею пополам.

Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры F относительно прямой l, образует фигуру F', *симметричную фигуре F относительно прямой l* (рис. 34).

Свойство симметрии фигур взаимно.

Все точки фигуры F, лежащие на оси симметрии, при преобразовании симметрии остаются неподвижными.

Отрезки AB и $A'B'$ на рис. 34 симметричны друг другу.

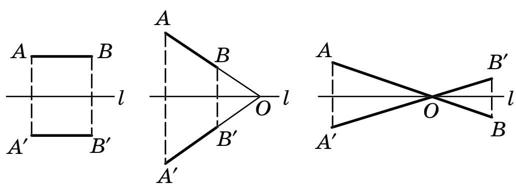


Рис. 34

Пример 3. Луч света, выйдя из точки M, отразился от зеркала и попал в точку N. Построить путь луча.

Проделаем следующее построение. Найдем точку N', симметричную точке N относительно оси l (рис. 35). Соединим отрезками точку N' с точкой M, а точку P с точкой N. Путь MPN будет кратчайшим, так как $PN = PN'$, а MPN' — прямая.

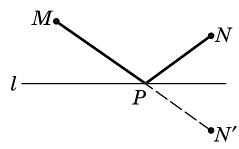


Рис. 35

Подобие. Центральная симметрия. Точка A' называется *центрально-подобной* (или *гомотетичной*) точке A относительно *центра подобия O с коэффициентом подобия* $k \neq 0$, если A' лежит на прямой OA и $\frac{OA'}{OA} = k$ (рис. 36). Если точки A и A' лежат по одну сторону от центра подобия O, то числу k приписываем знак «+», если по разные стороны, то знак «−».

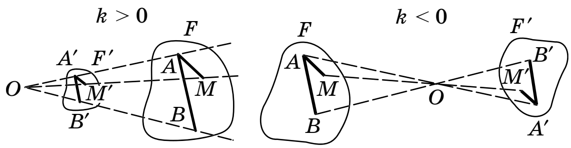


Рис. 36

Совокупность всех точек, центрально-подобных точкам некоторой фигуры F, образует фигуру F' (см. рис. 36), *центрально-подобную* F (относительно центра подобия O с коэффициентом подобия k).

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *центрально-подобным преобразованием* или *гомотетией*.

Свойства гомотетии.

1. Если фигура F гомотетична фигуре F' относительно центра O с коэффициентом k, то фигура F' гомотетична фигуре F относительно того же центра с коэффициентом $1/k$.

2. Гомотетия переводит прямую AB в прямую $A'B'$, ей параллельную (см. рис. 36).

3. Гомотетия сохраняет все углы.

4. Гомотетия сохраняет отношение любых отрезков и площадей.

Преобразование подобия с коэффициентом подобия -1 называется *центральной симметрией*. Можно дать самостоятельное определение центральной симметрии.

Точка A' называется *симметричной точке* A ($A \neq A'$) *относительно центра симметрии* O, если отрезки OA и OA' равны и лежат на одной прямой по разные стороны от точки O.

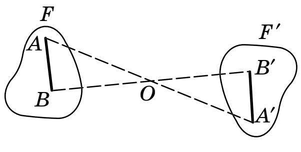


Рис. 37

Совокупность всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно центра симметрии O, образует фигуру F', симметричную фигуре F относительно O (рис. 37).

Два треугольника F и F' называются *подобными*, если их можно расположить так, что найдутся точка O — центр подобия и число k — коэффициент подобия такие, при которых треугольники F и F' удовлетворяют определению, данному выше.

Признаки подобия треугольников.

Два треугольника ABC и $A'B'C'$ подобны, если выполняется одно из следующих у с л о в и й.

1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

2. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

3. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \quad \gamma = \gamma'.$$

Пример 4. Вписать в данный треугольник ABC квадрат $KLMN$ так, чтобы сторона MN лежала на основании AB, а вершины K и L — на боковых сторонах треугольника.

Строим некоторый квадрат $K'L'M'N'$ так, чтобы точка K' лежала на AC, а отрезок $N'M'$ на AB (рис. 38). Искомый квадрат получается из данного преобразованием подобия с центром в точке A (доказать!). Поэтому вершина L лежит на пересечении прямой AL' со стороной BC. Найдя точку L, построить искомый квадрат не составляет труда.

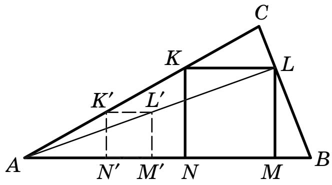


Рис. 38

Инверсия. На плоскости задана окружность с центром в точке O и радиусом R. *Инверсия плоскости* относительно этой окружности — преобразование плоскости, при котором каждой ее точке P ставится в соответствие точка P', лежащая на луче OP и такая, что $OP \cdot OP' = R^2$. Точка P' называется *инверсной* или *обратной* точке P относительно данной окружности. Данная окружность называется *базисной*, ее центр — *центром инверсии*, R — *радиусом инверсии*.

Свойства инверсии.

Если точка P' инверсна точке P, то и обратно: точка P инверсна точке P'. Никакая точка плоскости не инверсна центру инверсии O. Если фигура Φ переходит при инверсии в фигуру Φ', то при той же инверсии фигура Φ' переходит в фигуру Φ.

Следующие свойства справедливы на плоскости, из которой «выколот» центр инверсии.

Точки, лежащие внутри базисной окружности, переходят при инверсии в точки, лежащие вне этой окружности; точки, лежащие вне базисной окружности, переходят в точки, лежащие внутри этой окружности; точки, лежащие на базисной окружности, остаются на месте. Преобразование инверсии взаимно однозначно.

При инверсии луч, проходящий через центр инверсии, преобразуется в себя: часть луча, лежащая внутри окружности, преобразуется в его внешнюю часть, и наоборот. Окружность, концентрическая базисной, переходит в окружность, концентрическую базисной. Окружность с центром в точке O_1, проходящая через O, переходит в прямую $P'A'$, перпендикулярную O_1O. Прямая $P'A'$, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. Центр O_1 этой окружности лежит на перпендикуляре, опущенном из O на прямую $P'A'$ (рис. 39, *а*). Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность. Окружность, пересекающая базисную окружность под прямым углом, переходит в себя.

Построение инверсной точки.

1. Данная точка P лежит вне базисной окружности (рис. 39, *б*). Центр O инверсии соединяем с точкой P. На отрезке OP, как на диаметре, строим окружность. Из точки T ее пересечения с базисной окружностью опускаем перпендикуляр на OP. Основание P_1 этого перпендикуляра и есть точка, инверсная данной точке P.

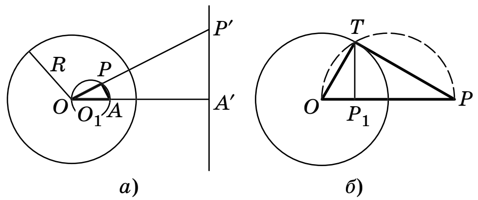


Рис. 39

2. Данная точка P_1 лежит внутри базисной окружности (см. рис. 39, *б*). Проведем прямую OP_1. В точке P_1 строим прямую, перпендикулярную OP. В точке T пересечения этого перпендикуляра с базисной окружностью строим касательную к последней. Точка P пересечения касательной с прямой OP_1 и будет инверсной точке P_1.

14. Фигуры в пространстве

Прямые и плоскости. Углы. Две прямые в пространстве могут: а) пересекаться; б) не пересекаться, но лежать в одной плоскости (*параллельные* прямые); в) не пересекаться и не лежать в одной плоскости (*скрещивающиеся* прямые).

Если на каждой из скрещивающихся прямых задано направление, то *углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между сонаправленными каждой из этих прямых лучами, проходящими через общую точку.

Прямая *параллельна* плоскости, если она не имеет с ней общих точек. Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Ортогональная проекция точки на плоскость — основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость (точка не принадлежит плоскости).

Ортогональная проекция отрезка на плоскость — отрезок прямой, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных на эту плоскость из концов данного отрезка.

Ортогональная проекция фигуры на плоскость — множество ортогональных проекций всех точек данной фигуры на данную плоскость.

Угол между наклонной и плоскостью измеряется углом между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

1. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.

3. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна и любой прямой этой плоскости.

4. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции другой прямой (не принадлежащей плоскости) на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой прямой.

5. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна другой прямой (не принадлежащей плоскости),

то она перпендикулярна и проекции этой прямой на данную плоскость.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре *двугранных угла*, каждый из которых измеряется линейным углом между перпендикулярами к ребру, восставленными в обеих плоскостях из одной точки.

Несколько плоскостей, проходящих через одну точку, образуют *многогранный угол*, если никакие три из них не пересекаются по общей прямой.

Многогранники. *Многогранная поверхность* образована совокупностью конечного числа плоских многоугольников, называемых ее *гранями*. При этом каждая сторона любого многоугольника — *ребро* одновременно является стороной другого (только одного) многоугольника этой же многогранной поверхности. Кроме того, необходимо, чтобы любые две точки многогранной поверхности можно было соединить ломаной, звенья которой принадлежат граням этой поверхности. Вершины граней называются *вершинами* многогранной поверхности. Еще одно требование: многогранная поверхность ограничена, т. е. существует сфера конечного радиуса R, в которую эту поверхность можно поместить.

Многогранная поверхность делит пространство на две части — внутреннюю область многогранной поверхности и внешнюю по отношению к ней область. (Во внешней области есть прямые, целиком ей принадлежащие; во внутренней области таких прямых нет.)

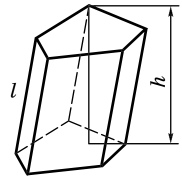
Многогранник — объединение многогранной поверхности и ее внутренней области. Гранями, ребрами и вершинами многогранника являются грани, ребра и вершины соответствующей многогранной поверхности.

Выпуклый многогранник — многогранник, все точки которого лежат по одну сторону от плоскости, содержащей любую из его граней.

Обозначения: V — объем; $S_{осн}$ (S_1 и S_2) — площадь основания; $S_{бок}$ — боковая поверхность; S — полная поверхность ($S = S_{осн} + S_{бок}$, где $S_{осн}$ — площадь, возможно, и двух оснований, тогда $S = S_1 + S_2 + S_{бок}$); h — высота; Q — площадь перпендикулярного сечения; p — периметр перпендикулярного сечения; l — ребро; d — диагональ.

Призма

Основания — равные многоугольники, боковые грани — параллелограммы.



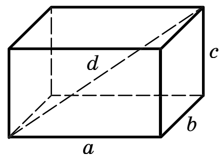
У призмы боковые ребра равны и параллельны.

$$V = S_{\text{осн}}h;\ S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Центр масс — середина отрезка, соединяющего центры масс оснований.

Параллелепипед

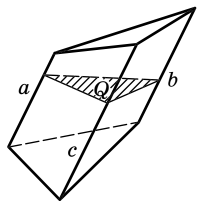
Все грани — параллелограммы. У *прямоугольного параллелепипеда* все грани — прямоугольники. Для него



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$
$$S = 2(ab + ac + bc);$$
$$V = abc.$$

Усеченная призма

Боковые ребра параллельны.

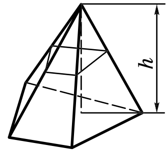


$$V = Q\frac{a + b + c}{3}$$

(a, b, c — боковые ребра, Q — площадь сечения, перпендикулярного ребрам).

Пирамида

Основание — многоугольник, боковые грани — треугольники, имеющие общую вершину,



$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h,\ \ S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Центр масс лежит на отрезке, соединяющем вершину с центром масс основания, и отстоит от основания на расстоянии $h/4$.

Если ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то вершина пирамиды проецируется в центр описанной около основания окружности. Когда в основании такой пирамиды лежит прямоугольный треугольник, то вершина пирамиды проецируется в середину гипотенузы.

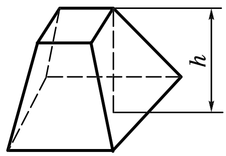
Если грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то вершина пирамиды проецируется в центр вписанной в основание окружности.

Пирамида называется *правильной*, если в основании ее лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проецируется в центр основания. В правильной пирамиде

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha},$$

где α — угол наклона граней к основанию.

Усеченная пирамида



Основания S_1 и S_2 параллельны и подобны;

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right);$$

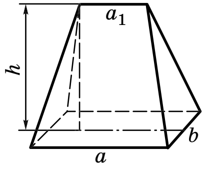
$$S = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}.$$

Центр масс лежит на отрезке, соединяющем центры масс оснований и отстоит от большего основания на расстоянии, равном

$$\frac{h}{4}\,\frac{S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 3S_2}{S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2};$$

$$V = \frac{h}{6}(2a + a_1)b.$$

Клин

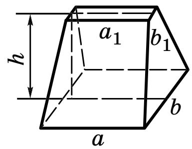


В основании — параллелограмм, верхнее ребро параллельно паре ребер основания

Центр масс отстоит от основания на расстоянии, равном

$$\frac{h}{2}\,\frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

Обелиск (*усеченный клин*)



Основания параллельны и подобны, боковые грани — трапеции.

$$V = \frac{h}{6}[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1].$$

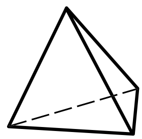
Центр масс лежит на отрезке, соединяющем центры масс оснований, и отстоит от нижнего основания на расстоянии

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b}.$$

Правильные многогранники. *Правильными* называются выпуклые многогранники, у которых все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Всего имеется пять правильных многогранников.

Обозначения: V — объем; S — площадь поверхности; a — сторона; R — радиус описанной сферы; r — радиус вписанной сферы; h — высота; d — диагональ.

Тетраэдр

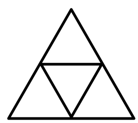


Все 4 грани — равносторонние треугольники; 4 вершины; 6 ребер.

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 0{,}117851a^3;$$

$$S = a^2\sqrt{3} = 1{,}732051a^2;$$

Развертка



$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6} = 0{,}204124a;$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6} = 0{,}612372a;$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = 0{,}816497a;$$

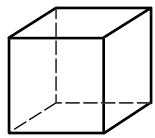
$$\frac{r}{R} = \frac{1}{3}.$$

Центр масс отстоит от основания на расстоянии $\frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Угол между гранями равен 70°32′.

Куб (гексаэдр)

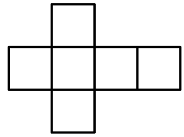
Все 6 граней — квадраты; 8 вершин; 12 ребер.

$$V = a^3;\ S = 6a^2;\ d = a\sqrt{3};$$
$$r = \frac{a}{2};\ R = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$



Центр масс — точка пересечения диагоналей. Угол между гранями равен 90°.

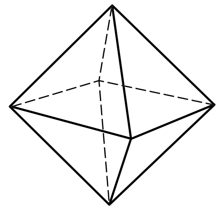
Развертка



Октаэдр

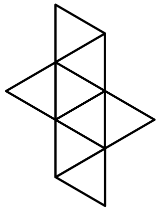
Все 8 граней — равносторонние треугольники; 6 вершин, 12 ребер.

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 0{,}471405a^3;$$
$$S = 2a^2\sqrt{3} = 3{,}464102a^2;$$
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



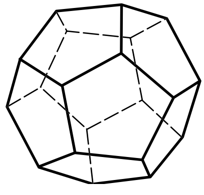
Центр масс — точка пересечения диагоналей «основного» квадрата. Угол между гранями равен 109°28′.

Развертка

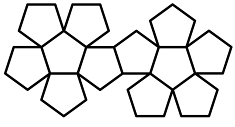


Додекаэдр

Все 12 граней — правильные пятиугольники; 20 вершин; 30 ребер.



Развертка



$$V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4} = 7{,}663119a^3;$$

$$S = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} = 20{,}645729a^2;$$

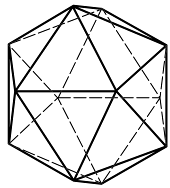
$$R = \frac{a\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4} = 1{,}401259a;$$

$$r = \frac{a\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20} = 1{,}113516a; \ \frac{r}{R} = 0{,}795.$$

Центр масс — середина отрезка, соединяющего центры противоположных граней. Угол между гранями равен 116°34′ (180° − arctg 2).

Икосаэдр

Все 20 граней — равносторонние треугольники; 12 вершин, 30 ребер.



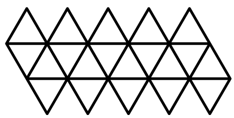
$$V = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12} = 2{,}181695a^3;$$

$$S = 5a^2\sqrt{3} = 8{,}660254a^2;$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})} = 0{,}951057a;$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12} = 1{,}309017a.$$

Развертка



Центр масс — точка пересечения диагоналей основного шестиугольника, угол между гранями равен 138°11′.

Правильные самопересекающиеся многогранники. Если стороны правильного многоугольника с числом сторон, большим четырех, продолжить до пересечения с продолжением другой стороны, то можно получить правильный звездчатый многоугольник (рис. 40). Чтобы получить звезду в пространстве, нужно сделать то же самое с правильным многогранником. У самопересекающихся многогранников (они называются также *звездчатыми* и *многогранниками Пуансо*) имеется ядро — тот правильный многогранник, из ко-

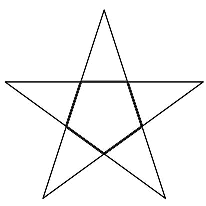


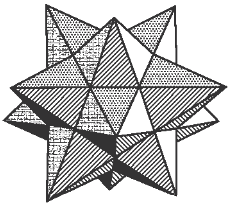
Рис. 40

торого получен звездчатый. Возможны всего четыре правильных звездчатых многогранника. Три из них получаются из додекаэдра, а один — из икосаэдра.

Обозначения: A — ребро; a — ребро внутреннего правильного многогранника; R — радиус описанной сферы; r — радиус вписанной сферы; Θ — угол между гранями.

Малый звездчатый додекаэдр

12 граней; 12 вершин; 30 ребер.

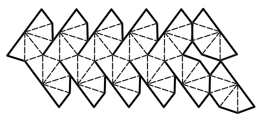


$$\frac{A}{a} = 2 + \sqrt{5} = 4{,}236;$$

$$\frac{A}{R} = 1{,}7013, \quad \Theta = 116°34';$$

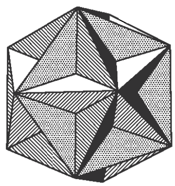
$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447.$$

Развертка



Большой додекаэдр

12 граней; 12 вершин; 30 ребер.



$$\frac{A}{a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}618;$$

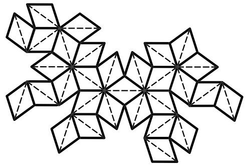
$$\frac{A}{R} = 1{,}0515;$$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447;$$

$$\Theta = 63°26';$$

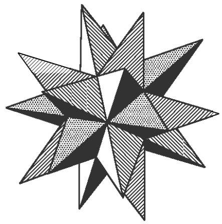
$$\frac{A}{r} = 2{,}351.$$

Развертка



Большой звездчатый додекаэдр

12 граней; 12 вершин; 30 ребер.



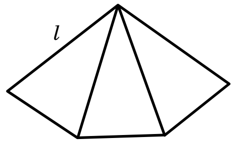
$$\frac{A}{a} = 4{,}236; \quad \frac{A}{R} = 1{,}868;$$

$$\frac{r}{R} = 0{,}1876; \quad \frac{A}{r} = 9{,}957;$$

$$\frac{l}{A} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}382;$$

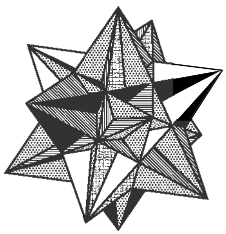
$$\frac{l}{r} = 3{,}80; \quad \Theta = 63°26'.$$

Развертка одной пирамиды



Большой икосаэдр

20 граней; 12 вершин; 30 ребер.



$$\frac{A}{a} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6{,}854;$$

$$\frac{A}{R} = \sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}} = 1{,}701;$$

$$\frac{r}{R} = (15 + 6\sqrt{5})^{-1/2} = 0{,}1876;$$

$$\Theta = 41°49';$$

$$\frac{l}{r} = 2\sqrt{3} = 3{,}464°;$$

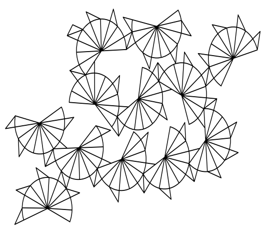
$$\frac{m}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618;$$

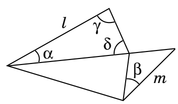
$$\alpha = 22°14'; \; \beta + \gamma = 120°;$$

$$\beta = 37°46' = 60° - \alpha,$$

$$\delta = 75°32', \; \gamma = 82°14'.$$

Развертка





Полуправильные многогранники. Выпуклый многогранник называется *равноугольно полуправильным* или *архимедовым*, если все его грани — правильные многоугольники, а все многогранные углы равны между собой. Многогранник называется *равногранно полуправильным*, если все его грани равны между собой, а все его многогранные углы правильные. (Многогранный угол называется *правильным*, если все его линейные углы равны между собой и все двугранные углы равны между собой.) Если центры граней архимедова многогранника принять за вершины нового многогранника, то получится равноугольно полуправильный многогранник.

Верно и обратное утверждение: центры граней равноугольно полуправильного многогранника являются вершинами архимедова многогранника.

Простейшим примером архимедовых многогранников служит правильная n-угольная призма с квадратными боковыми гранями. Двойственной будет фигура, составленная из двух правильных n-угольных пирамид, приложенных друг к другу основаниями (рис. 41). Кроме правильных призм, есть только одна бесконечная серия архимедовых многогранников — антипризмы. Простейшей антипризмой является октаэдр. На рис. 42 изображены антипризма и двойственный ей равногранный полуправильный многогранник.

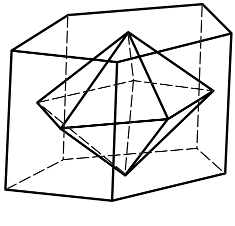


Рис. 41

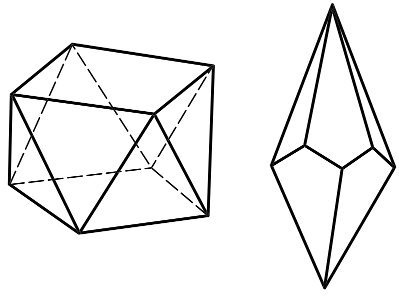
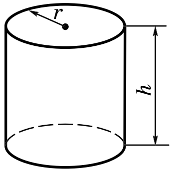


Рис. 42

Цилиндр, конус. Площади и объемы.

Прямой круговой цилиндр



Основание — круг, образующая перпендикулярна основанию;

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2}{4} h;$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h = \pi d h;$$

$$S = 2\pi r\,(r + h) = \pi d\left(\frac{d}{2} + h\right).$$

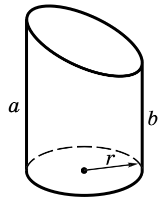
Центр масс — середина оси.

Усеченный прямой круговой цилиндр

$$V = \frac{\pi r^2}{2}(a + b) = \frac{\pi d^2}{8}(a + b);$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r\,(a + b) = \frac{\pi d}{2}(a + b);$$

$$S = \pi r\left[a + b + r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2}\,\right].$$

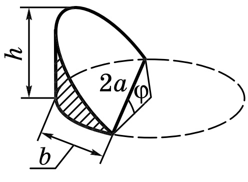


Центр масс лежит на оси, соединяющей центры масс оснований, на расстоянии

$$\frac{a + b}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{r^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{a + b},$$

где a и b — наибольшая и наименьшая образующие; α — угол наклона верхнего основания к плоскости нижнего.

Цилиндрическая подкова



$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\frac{\varphi\pi}{180^\circ}\right];$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{2rh}{b}\left[(b - r)\frac{\varphi\pi}{180^\circ} + a\right].$$

Здесь: h — высота; r — радиус основания; $2a$ — прямое ребро; b — стрелка сегмента основания; 2φ — центральный угол основания (в градусах).

Если в основании полукруг, то

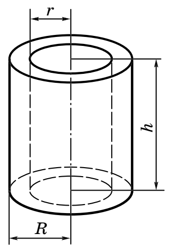
$$V = \frac{2}{3} r^2 h, \qquad S_{\text{бок}} = 2rh.$$

Полый цилиндр

$$V = \pi r(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) =$$
$$= \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho;$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi h(R + r);$$

$$S = 2\pi(R + r)(h + R - r) = 4\pi\rho(h + \delta).$$



Здесь: R — наружный радиус; r — внутренний радиус; h — высота; $\delta = R - r$ — толщина; $\rho = \frac{R+r}{2}$ — средний радиус.

Центр масс — середина оси.

Прямой круговой конус

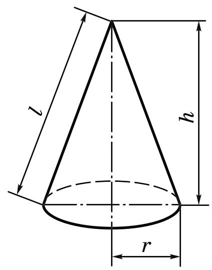
Основание — круг, ось перпендикулярна основанию;

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}d^2 h;$$

$$S_{\text{бок}} = \pi rl; \quad l = \sqrt{r^2 + h^2};$$

$$S = \pi r\,(r + l) = \pi\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2} + l\right),$$

где l — образующая.



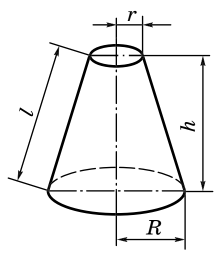
Центр масс лежит на оси на расстоянии $h/4$ от основания.

Усеченный прямой круговой конус

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2) =$$
$$= \frac{1}{12}\pi h\,(d^2 + dD + D^2);$$

$$S_{\text{бок}} = \pi l(r + R) = \frac{\pi l}{2}(d + D);$$

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (D - d)^2};$$



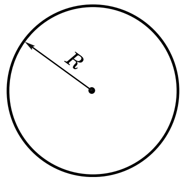
$$S = \pi[r^2 + R^2 + l\,(r + R)] = \frac{\pi}{4}[d^2 + D^2 + 2l\,(d + D)].$$

Центр масс лежит на оси и отстоит от основания на расстоянии, равном

$$\frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2rR + 3r^2}{R^2 + rR + 2r^2}.$$

Шар.

Шар



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}D^3 = \frac{RS}{3} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}};$$

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2 = \sqrt[3]{36\pi V^2};$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}};$$

$$D = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}};$$

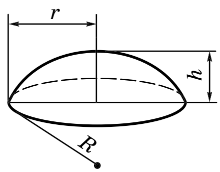
Полый шар

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3);$$

$$S = 4\pi\,(R^2 + r^2) = \pi\,(D^2 + d^2).$$

Здесь: R — наружный радиус; r — внутренний радиус; D — наружный диаметр; d — внутренний диаметр.

Шаровой сегмент



$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^3 + h^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2\,(3R - h) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^2\,(3D - 2h);$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi\,(r^2 + h^2);$$

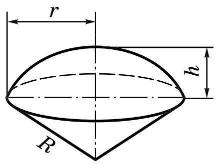
$$S = \pi\,(2Rh + r^2) = \pi\,(h^2 + 2r^2);$$

$$r = \sqrt{h(2R - h)},$$

где h — высота, r — радиус основания.

Центр масс лежит на оси симметрии и отстоит от центра шара на расстоянии $\frac{3}{4}\cdot\frac{(2R-h)^2}{3R-h}$.

Шаровой сектор



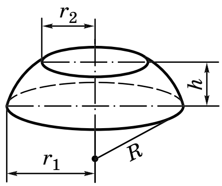
$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{6} D^2 h;$$

$$S = \pi R(2h + r),$$

где h — высота сегмента, r — радиус основания сегмента.

Центр масс лежит на оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{3}{8}(2R - h)$ от центра шара.

Шаровой пояс



$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2);$$

$$S_{бок} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

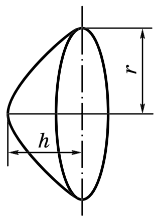
$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2) =$$

$$= \pi(Dh + r_1^2 + r_2^2),$$

где h — высота пояса; r_1 и r_2 — радиусы оснований.

Фигуры вращения. Объем фигуры вращения.

Параболоид вращения

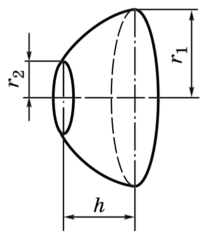


$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h.$$

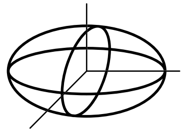
Центр масс лежит на оси вращения на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от вершины.

Усеченный параболоид вращения

$$V = \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 - r_2^2).$$



Эллипсоид



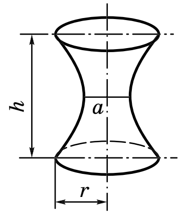
$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Объем эллипсоида вращения

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

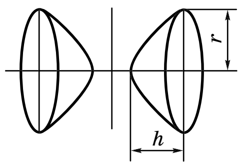
Гиперболоид

Однополостный



$$V = \frac{\pi h}{3}(2a^2 + r^2).$$

Двуполостный

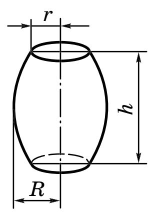


$$V = \frac{\pi h}{3}\left(3r^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right),$$

где a, b — полуоси гиперболы.

Бочка

Сферическая



$$V = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2) =$$

$$= \frac{1}{12}\pi h(2D^2 + d^2).$$

Параболическая

$$V = \frac{1}{15}\pi h(8R^2 + 4Rr + 3r^2) =$$

$$= \frac{1}{60}\pi h(8D^2 + 4dD + 3d^2).$$

IV. Тригонометрия

15. Тригонометрические функции

Определения. Тригонометрические функции острых углов можно определить как отношения длин сторон прямоугольного треугольника (рис. 43):

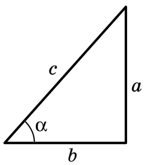


Рис. 43

синус: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$;

косинус: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$;

тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$;

котангенс: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$.

В геометрии, как правило, рассматривают углы, не превышающие полного. При этом образующие угол лучи считают равноправными. В тригонометрии определение угла уточняется. Это уже не просто часть плоскости, ограниченная двумя лучами. При задании угла в тригонометрии дополнительно указывается: во-первых, какой из пары лучей, образующих угол, является первым; во-вторых, направление движения от первого луча ко второму — движение против часовой стрелки считают положительным, а движение по часовой стрелке — отрицательным; в-третьих, если угол больше полного, сколько полных углов он содержит.

Чтобы определить тригонометрические функции для произвольных углов, на плоскости вводят систему координат xOy таким образом, чтобы начало координат O совпадало с вершиной угла, а положительная полуось абсцисс — с первым из образующих угол лучей (рис. 44). Пусть A — произвольная точка второго луча; x — ее абсцисса; y — ордината. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = (x, y)$. Длина этого вектора равна $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

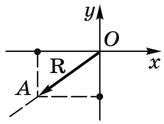


Рис. 44

Независимо от того, какой угол между Ox и OA рассматривается (это может быть угол, для которого направление от полуоси Ox к лучу OA положительно, угол, для которого это направление отрицательно, угол, меньший по модулю полного, и угол, содержащий несколько полных оборотов, положительных или отрицательных), его тригонометрические функции определяются следующим образом:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ — отношение ординаты вектора $\overrightarrow{OA}$ к его длине;

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ — отношение абсциссы вектора $\overrightarrow{OA}$ к его длине;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$ — отношение ординаты вектора $\overrightarrow{OA}$ к его абсциссе, $\cos\alpha \neq 0$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}$ — отношение абсциссы вектора $\overrightarrow{OA}$ к его ординате, $\sin\alpha \neq 0$;

В качестве определений тангенса и котангенса обычно берут их выражения через синус и косинус.

После того как для конкретного угла введена система координат, положительная полуось абсцисс которой совпадает с первым лучом этого угла, второй луч попадает в один из четырех квадрантов или совпадает с одной из координатных полуосей. В тригонометрии квадранты часто называют *четвертями*.

Синус и косинус определены для любого угла α. Тангенс определен для всех значений угла α, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (кроме $\alpha = 90° + 180°n$), $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, а котангенс — для всех значений угла α, кроме $\alpha = \pi n$ (кроме $\alpha = 180°n$), $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Иногда употребляются функции $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$:

секанс: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

косеканс: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

Таблица IV.1

Знаки тригонометрических функций в четырех квадрантах

Квадрант	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Основные соотношения:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}; \quad 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha;$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\,\alpha;$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Таблица IV.2

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Аргумент	Функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
0	0	1	0	∞*
$15°\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$

Продолжение табл. IV.2

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$36°\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54°\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72°\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$75°\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞*	0
$120°\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$180°(\pi)$	0	-1	0	∞*
$240°\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	∞*	0

* Значок ∞ в данном случае означает, что при соответствующем значении аргумента функция не существует, но по мере приближения к этому значению аргумента значение функции неограниченно возрастает по модулю.

Таблица IV.3

Выражение одних тригонометрических функций через другие*

Функции	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
sin α		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
tg α	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
ctg α	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
sec α	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
cosec α	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

* Знак перед корнем определяется из таблицы IV.1 на с. 198 в зависимости от того, в каком квадранте расположен аргумент.

Функции отрицательного аргумента:

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha; \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha; \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha; \\ \operatorname{cosec}(-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha; \end{aligned}\right\}$$ $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — функции нечетные;

$$\left.\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha; \\ \sec(-\alpha) &= \sec\alpha; \end{aligned}\right\}$$ $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ — функции четные.

Таблица IV.4

Формулы приведения

Аргумент	Функция					
	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\operatorname{cosec}\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

Периодичность

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ имеют *период* 2π, а функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — *период* π:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha; \quad \operatorname{cosec}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{cosec}\alpha;$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha; \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sec(\alpha + 2\pi n) = \sec\pi; \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Теоремы сложения

Функции суммы и разности двух углов:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha;$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha+1};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}.$$

Примечание. Каждая из формул для тангенса и котангенса справедлива только при условии, что все входящие в нее функции существуют.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Функции кратных углов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

$\sin 4\alpha = \cos\alpha\,(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha);$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha};$$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$

$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Примечание. Каждая из формул для тангенса и котангенса справедлива только при условии, что все входящие в нее значения функций существуют.

Функции половинного угла:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}.$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от того, в каком квадранте оказывается угол $\frac{\alpha}{2}$. Например, при $\alpha = 240°$ нужно выбрать знак «+» для $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ и знак «−» для $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, так как $\frac{\alpha}{2} = 120°$ лежит во втором квадранте.

Примечание. Применяя формулы, следите, чтобы правая и левая части каждой формулы для тангенса и котангенса половинного аргумента существовали одновременно.

Произведения тригонометрических функций:

$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta);$

$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta);$

$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta);$

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin (\alpha + \beta - \gamma) + \sin (\beta + \gamma - \alpha) + \sin (\gamma + \alpha - \beta) - \sin (\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin (\alpha + \beta - \gamma) - \sin (\beta + \gamma - \alpha) + \sin (\gamma + \alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos (\alpha + \beta - \gamma) + \cos (\beta + \gamma - \alpha) + \cos (\gamma + \alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta + \gamma);$$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha); \quad \sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(- \sin 3\alpha + 3 \sin \alpha);$

$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3);$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha);$

$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3);$

$\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$

$\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta;$

$\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta;$

$\sec^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha;$

$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha};$

$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta};$

$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$

Примечание. Правая и левая части каждой формулы, в которую входят тангенсы и (или) котангенсы, должны существовать одновременно.

Суммы и разности тригонометрических функций:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha\,\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$p\cos\alpha + q\sin\alpha = r\sin(\alpha+\theta),$$

где $r = \sqrt{p^2+q^2}$; $\sin\theta = \frac{p}{r}$; $\cos\theta = \frac{q}{r}$;

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}; \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}; \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Примечание. Правая и левая части приведенных выше формул, в которые входят секансы и косекансы, а также тангенсы и (или) котангенсы, либо одновременно существуют, либо одновременно перестают существовать.

16. Обратные тригонометрические функции

Определения. Для функции $y = \sin x$ на числовой оси Ox выделяется промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, на котором эта функция является монотонно возрастающей. Когда x принимает значения из этого промежутка, функция y принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$. Функция $y =$

$= \sin x$, определенная на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, имеет обратную функцию, которую называют *арксинусом* y и обозначают $x = \arcsin y$, где уже y — аргумент; x — функция. Перейдя к обычным обозначениям для аргумента и функции, получим:

$$y = \arcsin x.$$

Таким образом, $\arcsin x$, где $x \in [-1, 1]$, есть такое число y $\left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, синус которого равен x, т. е. $\sin y = x$.

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции.

Функция $y = \cos x$, определенная на промежутке $[0, \pi]$, где она является монотонно убывающей, имеет обратную функцию, которую называют *арккосинусом* y и обозначают $x = \arccos y$. После перехода к обычным обозначениям для функции и аргумента получим:

$$y = \arccos x.$$

Таким образом, $\arccos x$, где $x \in [-1, 1]$, есть число y $(y \in [0, \pi])$, косинус которого равен x, т. е. $\cos y = x$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$, определенная на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, где она является монотонно возрастающей, имеет обратную функцию, которую называют *арктангенсом* y и обозначают $x = \operatorname{arctg} y$. После перехода к обычным обозначениям для функции и аргумента получим:

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{arctg} x$, где $x \in (-\infty, +\infty)$, есть такое число y $\left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, тангенс которого равен x, т. е. $\operatorname{tg} y = x$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$, определенная на промежутке $(0, \pi)$, где она является монотонно убывающей, имеет обратную функцию, которую называют *арккотангенсом* y и обозначают $x = \operatorname{arcctg} y$.

После перехода к обычным обозначениям для функции и аргумента получим:

$$y = \operatorname{arcctg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{arcctg} x$, где $x \in (-\infty, +\infty)$, есть такое число y $(y \in (0, \pi))$, котангенс которого равен x, т. е. $\operatorname{ctg} y = x$.

П р и м е ч а н и е. Можно также определить функции $y = \operatorname{arcsec} x$ и $y = \operatorname{arccosec} x$, которые употребляются редко. При этом обе функции $y = \operatorname{arcsec} x$ и $y = \operatorname{arccosec} x$ существуют только при $x \leqslant -1$ и при $x \geqslant 1$. Первая из них в каждой точке своего существования возрастает, а вторая — убывает. Графики см. на рис. 87—92.

Таблица IV.5

Функция	Область определения	Область значений
$y = \arcsin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$x \leqslant -1,\ x \geqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi,\ y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccosec} x$	$x \leqslant -1,\ x \geqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},\ y \neq 0$

С помощью обратных тригонометрических функций можно записать решения тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$:

$$\sin x = a,\ |a| \leqslant 1,\ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\cos x = a,\ |a| \leqslant 1,\ x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Основные соотношения.

Выражение обратных тригонометрических функций через другие обратные тригонометрические функции:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \; |x| < 1;$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \; |x| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Основные тригонометрические соотношения в применении к обратным тригонометрическим функциям приводят к равенствам:

$$\sin(\arcsin x) = x; \qquad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}; \qquad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}; \qquad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\cos(\arccos x) = x; \qquad \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

В этих формулах перед корнями не нужно ставить «$\pm$». В самом деле, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Поэтому $\sin(\arccos x) \geqslant 0$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то знак $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ совпадает со знаком x и т. д. В каждой формуле рассматриваются только значения x, при которых существуют все входящие в нее функции.

Пример 1. Вычислить $\mathrm{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right]$.

Обозначим: $\arccos\left(-\frac{40}{41}\right) = \varphi$; тогда $\cos\varphi = -\frac{40}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$;

$$\mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{-\frac{40}{41}}{\frac{9}{41}} = -\frac{40}{9}.$$

Функции отрицательного аргумента:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\,x$;

$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\,x$.

Пример 2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Пример 3. Доказать:

$$\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \mathrm{arcctg}\,\frac{2}{3} = \arccos\frac{9}{\sqrt{82}}.$$

Выкладки удобнее вести так:

$$\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{3},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0;$$

$$\mathrm{arcctg}\,\frac{2}{3} = \beta, \qquad \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{2}{3},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos\frac{9}{\sqrt{82}} = \gamma, \qquad \cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{82}};$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2};\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\alpha + \beta$ и γ находятся в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в котором монотонны синус и тангенс, то для доказательства равенства достаточно доказать, что $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \mathrm{tg}\,\gamma$ или $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$. Мы воспользуемся формулой для тангенсов:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{9};$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\sqrt{1-\frac{81}{82}}}{\frac{9}{\sqrt{82}}} = \frac{1}{9}.$$

Тем самым равенство доказано.

Сумма и разность:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\text{для } x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\text{для } x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\text{для } |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ x + y \geqslant 0;$$

$$\arccos x - \arccos y =$$

$$= \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right) \text{ для} |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ x \geqslant y; \\ \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right) \text{ для} |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ x < y. \end{cases}$$

Примечание. Предположения, что обычные условия существования арксинуса и арккосинуса ($|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$) соблюдены, недостаточно. Так, для первой из группы формул при $x = 1$ и $y = 1$ левая часть равна π, а правая ее часть равна 0. Требуется дополнительное ограничение: $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Если оно не выполнено, то в данном виде формула не верна. Аналогично в оставшихся четырех формулах.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \text{ для } xy \neq 1;$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \text{ для } xy \neq -1;$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y} \text{ для } x \neq -y;$$

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy+1}{y-x} \text{ для } x \neq y.$$

Для доказательства всех 8 формул нужно отдельно рассмотреть случаи, когда а) $x > 0$ и $y > 0$, б) $x < 0$, $y < 0$, в) либо $x = 0$, либо $y = 0$.

17. Тригонометрические уравнения

Простейшие уравнения.

Уравнение	Ограничения	Решения
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$
$\mathrm{tg}\, x = a$	—	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$
$\mathrm{ctg}\, x = a$	—	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$

Везде: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = (4n + 1)\frac{\pi}{2};$$

$$\sin x = -1, \quad x = (4n - 1)\frac{\pi}{2};$$

$$\cos x = 0, \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2};$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = (2\pi + 1)n;$$

$$\mathrm{tg}\, x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = 0, \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Разложение на множители. Если левую часть тригонометрического уравнения $f(x) = 0$ удалось разложить на множители: $f_1(x) \ldots f_k(x) = 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности k систем, каждая из которых состоит из уравнения $f_i(x) = 0$ и условия, что остальные $k - 1$ множителей имеют смысл. Строго говоря, такого рода условие не может быть частью формальной системы. Его следовало заменить соответствующими формальными ограничениями. Однако на практике удобнее провести все необходимые подстановки, чем убеждаться в справедливости ограничений, решая соответствующие неравенства. Тем более, что при их записи легко допустить ошибку.

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos^2 4x + \operatorname{ctg} x \cos^2 4x - \operatorname{ctg} x = 1.$$

Перенесем единицу в левую часть и разложим левую часть на множители:

$$(\operatorname{ctg} x + 1)(1 - \cos^2 4x) = 0,$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg} x + 1)\sin^2 4x = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + 1 = 0, \\ \sin 4x \text{ существует,} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 4x = 0, \\ \operatorname{ctg} x \text{ существует.} \end{cases}$$

Так как $\sin 4x$ существует при всех x, то решением первой системы будет

$$x = 3\frac{\pi}{4} + n\pi = (4n + 3)\frac{\pi}{4}.$$

Чтобы решить вторую систему, найдем корни уравнения: $\sin 4x = 0$; $x = k\frac{\pi}{4}$ и подставим их в $\operatorname{ctg} x$. Котангенс будет существовать, если k не делится на 4, и не будет существовать, если k делится на 4. Таким образом, решение второй системы можно записать так:

$$x = \frac{(4n+1)\pi}{4}, \qquad x = \frac{(4n+2)\pi}{4}, \qquad x = \frac{(4n+3)\pi}{4}.$$

Сюда вошло и решение первой системы. Заметим, что $4n + 1$ и $4n + 3$ — это все нечетные числа, а $4n + 2$ можно разделить на 2; перепишем решение уравнения так:

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{4}, \qquad x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Необходимые и достаточные условия равенства тригонометрических функций.

1) $\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2n\pi,\ \alpha - \beta = 2n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$;
2) $\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = (2n + 1)\pi,\ \alpha - \beta = 2n\pi\ (n \in \boldsymbol{Z})$;
3) $\sin\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = -2n\pi,\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi(n \in \boldsymbol{Z})$;
4) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = n\pi,\quad \alpha, \beta \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}\ (n \in \boldsymbol{Z})$;
5) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = n\pi,\quad \alpha, \beta \neq (2n + 1)\pi\ \ (n \in \boldsymbol{Z})$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 5x = \sin 7x$.

Воспользовавшись соотношением 2), получим

$$12x = (2n+1)\pi, \qquad x = (2n+1)\frac{\pi}{12},$$

$$2x = 2n\pi, \qquad x = n\pi.$$

Итак, $x = n\pi$, $x = (2n+1)\frac{\pi}{12}$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$.

Применим соотношение 4):

$$2x = n\pi, \text{ т. е. } x = n\frac{\pi}{2}.$$

Нужно исключить те значения n, при которых $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, т. е. оставить лишь $n = 2k$. Таким образом, $x = k\pi$.

Уравнения, приводящиеся к алгебраическим. Часто удается выразить все входящие в уравнение тригонометрические функции через одну и привести уравнение к алгебраическому.

Любое тригонометрическое уравнение, целое относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, можно привести к рациональному уравнению относительно $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул универсальной подстановки:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

В результате такого преобразования могут быть потеряны корни $x = \pi(2k+1)$, при которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ перестает существовать.

Пример 4. Решить уравнение $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

Заменяя $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0.$$

Обозначая $\cos x = y$, получим квадратное уравнение

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

которое имеет два корня: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Второй корень не удовлетворяет исходному уравнению, так как $\cos x \neq 2$.

Решая уравнение $\cos x = -1$, найдем, что $x = (2n + 1)\pi$.

Пример 5. Решить уравнение $\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

Выражая $\operatorname{ctg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$, получим уравнение

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

На множестве $\operatorname{tg} x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ оно равносильно уравнению

$$1 - \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad \text{или} \quad (\operatorname{tg} x + 1)^2 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} x = -1$. Следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{4n - 1}{4}\pi.$$

18. Решение треугольников

Основные теоремы и формулы. Для треугольников справедливо соотношение

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Теорема синусов:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

Формулы Мальвейде:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\sin\frac{\gamma}{2}}; \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]}{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}.$$

Теоремы для половинных углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Радиус описанного круга:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\alpha} = \frac{c}{2\sin\gamma};$$

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Радиусы вписанного и вневписанных кругов:

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$r = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}; \quad r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Медиана:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}.$$

Биссектриса:

$$w_a = \frac{2bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{c\sin\beta}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Высота:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta.$$

Замечание. Остальные значения медиан, биссектрис и высот, а также радиусов вписанных окружностей находят циклической перестановкой, т. е. заменой a на b, b на c, c на a, и, соответственно, α на β, β на γ, γ на α.

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

Прямоугольные треугольники.

Обозначения: γ — прямой угол, α и β — острые углы, c — гипотенуза, a, b — катеты, S — площадь.

Таблица IV.6

Номер	Данные	Формулы
1	c, α	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $a = c\sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$; $S = \frac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha$
2	a, α	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $b = a\operatorname{ctg}\alpha$; $S = \frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$
3	a, c	$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$; $b = c\sin\beta$ или $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$; $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}a\sqrt{(c+a)(c-a)}$
4	a, b	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$; $c = \frac{b}{\sin\beta}$; $S = \frac{ab}{2}$ или $c = \sqrt{a^2+b^2}$

Косоугольные треугольники.

Обозначения: a, b, c — стороны, α, β, γ — углы, p — полупериметр, S — площадь.

Таблица IV.7

Номер	Данные	Формулы
1	a, β, γ	$\alpha = \pi - (\beta - \gamma);\ b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha};\ c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha};$ $S = \dfrac{bc\sin\alpha}{2} = \dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$
2	b, c, α	$\beta + \gamma = \pi - \alpha;\quad \operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2};$ из последнего уравнения находим $\beta - \gamma$ и, зная, что $\beta + \gamma = \pi - \alpha$, определяем β; далее $a = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta};\quad S = \dfrac{bc\sin\alpha}{2}$ или по формулам Мальвейде: $a = \dfrac{(b-c)\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \dfrac{(b+c)\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$ (сначала из второго равенства находим угол $\beta - \gamma$, а затем величину a)
3	a, b, α	$\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$; находим β и затем $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha};\quad S = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$ Исследование: $\alpha \geqslant \dfrac{\pi}{2}\begin{cases} a \leqslant b, \text{ решения нет,} \\ a > b, \text{ одно решение } \beta < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $a \geqslant b$, одно решение $\beta < \dfrac{\pi}{2}$, $a < b\begin{cases} a < b\sin\alpha, \text{ решения нет,} \\ a = b\sin\alpha, \text{ одно решение } \beta = \dfrac{\pi}{2}, \\ a > b\sin\alpha, \text{ два решения } \beta' \text{ и } \beta'' = \pi - \beta' \end{cases}$
4	a, b, c	$r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{p-a};\ \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{p-b};\quad \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{p-c};$ $S = pr$

Часть 2

СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

V. Аналитическая геометрия на плоскости

19. Метод координат и простейшие задачи

Декартова прямоугольная система координат. На плоскости введена *система координат*, если указан способ, позволяющий однозначно устанавливать положение всех точек плоскости с помощью чисел. Наиболее употребительные системы координат: декартова прямоугольная и полярная (см. с. 222)

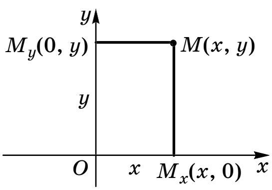


Рис. 49

Декартова прямоугольная система координат на плоскости определяется двумя взаимно перпендикулярными прямыми Ox и Oy (рис. 49), на которых выбраны положительные направления (указываемые стрелками) и масштаб для измерения длин. Эти прямые называются *осями координат* (ось Ox — *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*), точка O пересечения осей — *началом координат*. Положительное направление на оси Ox выбирается обычно вправо, а на оси Oy — вверх. Такая система координат называется *правой*. В ней поворот от оси Ox к оси Oy (на наименьший угол) до их совмещения осуществляется п р о т и в д в и ж е н и я часовой стрелки. Если же такой поворот осуществляется п о д в и ж е н и ю часовой стрелки, то система координат называется *левой*. Оси координат делят плоскость на четыре *четверти* (*I*, *II*, *III*, *IV*) — *квадранты*.

Положение произвольной точки M на плоскости вполне определяется заданием двух чисел x и y; число $|x|$ выражает в выбранном масштабе расстояние от точки M до оси ординат ($|x| = |OM_x|$ на рис. 49), число $|y|$ — расстояние от точки M до оси абсцисс ($|y| = |OM_y|$). Числа x и y называются *декартовыми прямоугольными координатами* (соответственно *абсциссой* и *ординатой*) точки M и берутся со знаком +, если направления отрезков OM_x и OM_y совпадают с положительными направлениями на осях Ox и Oy, или со знаком − в противном случае. На рис. 50 дана схема распределения знаков координат в различных четвертях и нумерация четвертей. Запись M (x, y) означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y.

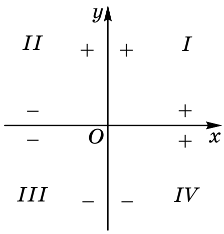


Рис. 50

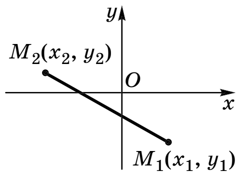


Рис. 51

Расстояние между двумя точками (рис. 51). Как бы ни были расположены на плоскости точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Частный случай. Расстояние от точки $M(x,\ y)$ до начала координат O (0, 0) равно

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Пример 1. Расстояние между точками M_1 (−3, 5) и M_2 (1, 2) равно

$$d = \sqrt{[1-(-3)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

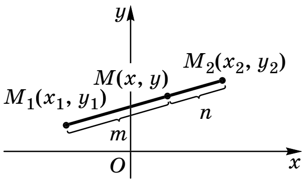


Рис. 52

Деление отрезка в данном отношении. Если заданы точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2)$ и известно, что точка $M\ (x,\ y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ (рис. 52), т. е.

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda = \frac{m}{n},$$

то координаты x и y точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

или

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m},$$

Частный случай. Координаты x и y середины M отрезка M_1M_2 определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

так как $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda = 1$.

Координаты x и y *центра масс* материальных точек $M_1\ (x_1,\ y_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2)$ соответственно с массами m_1 и m_2 определяются по формулам

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}; \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Координаты x и y центра масс однородной треугольной пластинки выражаются через координаты $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ и $(x_3,\ y_3)$ ее вершин:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Преобразование декартовых координат. Переход от одной правой декартовой прямоугольной системы координат к другой правой системе можно осуществить двумя преобразованиями:

1) параллельным переносом осей;

2) поворотом осей на угол α.

При *параллельном переносе* осей из положения xOy в новое положение $x'O'y'$ (рис. 53) координаты точки M в старой и новой системах координат связаны соотношениями:

$$x = x' + a; \qquad y = y' + b,$$

или

$$x' = x - a; \qquad y' = y - b,$$

где x и y — старые координаты точки M; x' и y' — ее новые координаты; a и b — координаты нового начала O' в старой системе координат.

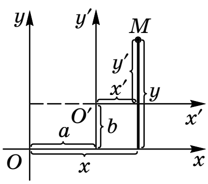


Рис. 53

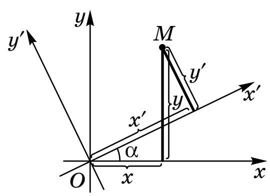


Рис. 54

При *повоторе* осей на некоторый угол α (рис. 54) старые координаты x, y связаны с новыми x', y' соотношениями

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

или

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha; \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

В общем случае преобразования правой прямоугольной системы координат справедливы формулы:

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$

$$y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Полярные координаты. *Полярная система координат* задается выбором точки O — *полюса*, луча OA, исходящего из точки O, — *полярной оси* и масштаба для измерения длин.

Положение точки M на плоскости определяется в полярной системе координат двумя числами: *полярным радиусом* $\rho = OM$ (рис. 55), выражающим длину отрезка OM в выбранном масштабе, и *полярным углом* $\theta = \angle AOM$ (в радианной мере). Полярный угол считают положительным, если он отсчитывается от полярной оси в направлении против движения часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае. Числа ρ и θ называются *полярными координатами* точки M, что записывают так: $M(\rho, \theta)$. Для полюса O значение полярного угла не определено. Любой другой точке плоскости ($\rho \neq 0$) соответствует единственная пара полярных координат, и обратно: по заданной паре полярных координат можно указать единственную соответствующую ей точку плоскости.

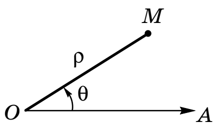


Рис. 55

Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Если полярную и декартову прямоугольную системы координат совместить так, чтобы полюс совпал с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси Ox (рис. 56), то независимо от расположения точки M на плоскости получим формулы перехода от полярных координат ρ, θ к декартовым x, y:

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta$$

и от декартовых к полярным:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

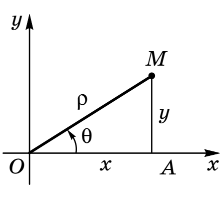


Рис. 56

Пример 2. Определить вид кривой $\rho = \cos\theta$.

Умножив обе части уравнения на ρ, получим

$$\rho^2 = \rho\cos\theta.$$

Воспользуемся формулами перехода:

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \rho\cos\theta = x.$$

Итак, получим

$$x^2 + y^2 = x, \text{ или } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

т. е. уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Эта окружность проходит через начало координат.

Уравнение линии. Уравнение с двумя переменными обозначают так:

$$F(x, y) = 0, \text{ или } y = f(x),$$

где $F(x, y)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее x и y.

Уравнением данной линии называется уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней. Величины x и y называются *текущими координатами* точки.

Линия, определенная данным уравнением, есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Линия, определяемая уравнением вида $y = f(x)$, называется *графиком* функции $f(x)$.

Если $F(x, y)$ — многочлен, то линия $F(x, y) = 0$ называется *алгебраической*. В этом случае степень многочлена называется *порядком* линии.

Для отыскания координат т о ч е к п е р е с е ч е н и я двух линий

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

необходимо решить систему

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

20. Прямая

Уравнение прямой. В декартовой системе координат каждая прямая определяется линейным уравнением относительно переменных и, обратно, каждое линейное уравнение определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Углом наклона прямой к оси Ox называется угол, на который надо повернуть положительную полуось Ox против движения часовой стрелки до совмещения с данной прямой. Если прямая параллельна оси Ox, то угол ее наклона к оси Ox считается *равным нулю*.

Каждая прямая, не перпендикулярная оси Ox, может быть определена уравнением

$$y = kx + b, \tag{1}$$

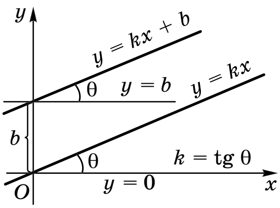


Рис. 57

где k — *угловой коэффициент* прямой, равный тангенсу угла наклона ее к оси Ox, т. е. $k = \operatorname{tg}\theta$ (рис. 57); b (*начальная ордината*) — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, взятая со знаком «+», если отрезок расположен над осью Ox, и со знаком «−» в противном случае.

При $b = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = kx$$

и определяет *прямую, проходящую через начало координат*. Это уравнение выражает прямую пропорцио-нальную зависимость переменных величин x и y.

При $k = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = b$$

и определяет *прямую, параллельную оси* Ox и отстоящую от нее на расстоянии, равном $|b|$.

При $k = 0$ и $b = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = 0$$

и определяет ось Ox.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1,\ y_1)$ и имеющей *угловой коэффициент* $k = \operatorname{tg}\theta$:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

Если k считать здесь переменной величиной, принимающей различные значения, то уравнение (2) называется уравнением пучка прямых, проходящих через данную точку M_1.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

Ее угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Условие того, что три данные точки $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$, $M_3(x_3,\ y_3)$ *лежат на одной прямой* (не параллельной осям Ox и Oy):

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \tag{5}$$

Частные случаи:

1) $C = 0$, уравнение (5) принимает вид

$$Ax + By = 0$$

и определяет прямую, *проходящую через начало координат* (рис. 58);

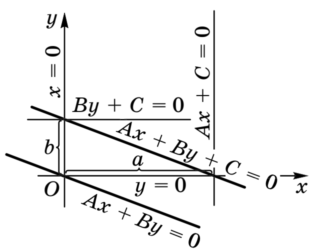


Рис. 58

2) $B = 0$ ($A \neq 0$), уравнение (5) принимает вид

$$Ax + C = 0, \text{ или } x = -\frac{C}{A} = a,$$

и определяет прямую, *параллельную оси* Oy (см. рис. 58). Если, кроме того, $C = 0$, то получаем *уравнение оси* Oy:

$$x = 0;$$

3) $A = 0$ ($B \neq 0$), уравнение (5) принимает вид

$$By + C = 0, \text{ или } y = -\frac{C}{B} = b,$$

и определяет прямую, *параллельную оси* Ox (см. рис. 58). Если, кроме того, $C = 0$, то получаем *уравнение оси* Ox:

$$y = 0.$$

Общее уравнение прямой (5) можно привести к виду уравнения (1) с угловым коэффициентом (если $B \neq 0$):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Таким образом, по данным коэффициентам A, B, C уравнения (5) можно вычислить угловой коэффициент k и величину b уравнения (1):

$$k = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{6}$$

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{7}$$

Здесь $|a|$ и $|b|$ — длины отрезков, которые прямая отсекает соответственно на осях Ox и Oy (рис. 59), а знаки чисел a и b указывают на расположение этих отрезков относительно начала координат.

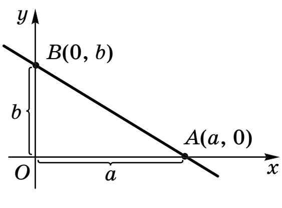


Рис. 59

Общее уравнение прямой (5) можно привести к виду уравнения (7) (если ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю), причем

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{8}$$

Уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения прямой на чертеже. По заданным a и b строим точки A $(a,\ 0)$ и B $(0,\ b)$ пересечения прямой с осями координат и через эти две точки проводим прямую.

Пример 1. Дана прямая своим общим уравнением

$$3x - 4y + 12 = 0.$$

Составить для этой прямой уравнение с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках и построить прямую.

Имеем: $A = 3,\ B = -4,\ C = 12$ (сравниваем с уравнением (3)). Найдем угловой коэффициент k прямой и величину b отрезка (с учетом знака), отсекаемого прямой на оси Oy (см. равенство (4)):

$$k = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4};\ b = -\frac{12}{-4} = 3.$$

Уравнение данной прямой с угловым коэффициентом

$$y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Таким образом, данная прямая образует с осью Ox угол θ, тангенс которого равен $\frac{3}{4}$.

На основании первого равенства (6) найдем длину $|a|$ и знак отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (длину $|b|$ и знак отрезка, отсекаемого на оси Oy, мы уже нашли):

$$a = -\frac{12}{3} = -4.$$

Уравнение данной прямой в отрезках:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Строим теперь точки A $(-4,\ 0)$ и B $(0,\ 3)$ пересечения данной прямой с осями координат (рис. 60) и через эти точки проводим прямую.

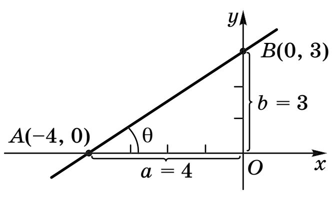


Рис. 60

Угол между двумя прямыми. Если две прямые заданы уравнениями

$$y = k_1 x + b_1; \quad y = k_2 x + b_2,$$

то угол φ между ними определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{9}$$

(угол φ отсчитывается от 1-й прямой ко 2-й против часовой стрелки).

Пример 2. Вычислить угол между прямой $2x - 3y + 6 = 0$ и прямой, проходящей через точки $(4, -5)$ и $(-3, 2)$.

Составим уравнение 2-й прямой (см. п. 23.1):

$$\frac{y+5}{2+5} = \frac{x-4}{-3-4}, \text{ или } x + y + 1 = 0.$$

Найдем угловые коэффициенты заданных прямых:

$$k_1 = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}; \quad k_2 = -\frac{1}{1} = -1.$$

По формуле (9) находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 + (-1) \cdot \frac{2}{3}} = -5.$$

Воспользовавшись табл. IX.5 в конце книги и учитывая знак тангенса, найдем искомый угол между прямыми:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-5) = 101°18'40''.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$k_2 = k_1, \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad \text{или} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Замечание. Случаи, когда прямые параллельны осям координат, нужно рассматривать особо.

Пример 3. Через точку (−2, −1) провести прямую параллельно прямой $2x - y + 5 = 0$.

Запишем уравнение пучка прямых (см. п. 23.1), проходящих через заданную точку (−2, −1):

$$y + 1 = k(x + 2).$$

Найдем угловой коэффициент заданной прямой:

$$k_1 = \frac{-2}{-1} = 2.$$

На основании условия параллельности прямых заключаем, что

$$k = k_1 = 2.$$

Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$y + 1 = 2(x + 2), \text{ или } 2x - y + 3 = 0.$$

Пример 4. Найти уравнение высоты BD треугольника ABC (рис. 61), если известны координаты его вершин: $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $C(6, 3)$.

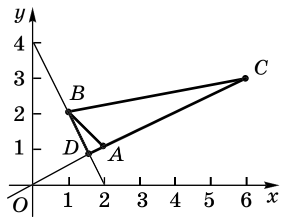


Рис. 61

Найдем уравнение стороны AC треугольника:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{6-2}, \quad \text{или} \quad x - 2y = 0.$$

Ее угловой коэффициент

$$k_{AC} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Высота BD треугольника принадлежит пучку прямых, проходящих через точку B:

$$y - 2 = k\,(x - 1).$$

Угловой коэффициент высоты BD найдем из условия перпендикулярности AC и BD:

$$k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}} = -2.$$

Запишем уравнение высоты BD:

$$y - 2 = -2(x - 1), \text{ или } 2x + y - 4 = 0.$$

Пересечение двух прямых. Если две прямые заданы уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

причем $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то координаты x_0, y_0 точки их пересечения находят при решении системы этих уравнений:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \qquad y_0 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

то данные прямые параллельны, в частности, при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

прямые совпадают.

Пример 5. Найти точку пересечения прямых:

$$2x - y - 5 = 0; \quad x + y - 1 = 0.$$

Так как $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$, то прямые пересекаются. Сложив первое уравнение со вторым, получим

$$3x - 6 = 0, \quad x = 2.$$

Подставив в первое уравнение $x = 2$, найдем

$$4 - y - 5 = 0, \quad y = -1.$$

Итак, данные прямые пересекаются в точке $(2, -1)$.

Пример 6. Выяснить взаимное расположение прямых

$$2x + 3y - 5 = 0; \quad 6x + 9y - 13 = 0.$$

В данном случае $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} \neq \frac{5}{13}$, следовательно, прямые параллельны. В самом деле, решая совместно эти уравнения (для этого достаточно из первого уравнения, умноженного на 3, вычесть второе), получим противоречивое равенство — $2 = 0$, свидетельствующее о том, что данная система несовместна.

Пример 7. Выяснить взаимное расположение прямых

$$2x + 3y - 5 = 0; \quad 6x + 9y - 15 = 0.$$

Данные прямые совпадают, так как $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{-5}{-15}$.

21. Кривые второго порядка

Окружность. *Уравнение окружности* имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \qquad (1)$$

где a и b — координаты центра C окружности; R — ее радиус (рис. 62).

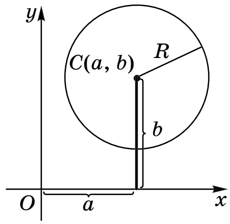


Рис. 62

Частные случаи:

1) уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

2) если окружности радиуса R проходят через начало координат и их центры лежат на оси Ox, то уравнения окружностей имеют вид

$$x^2 + y^2 \pm 2Rx = 0;$$

3) если окружности радиуса R проходят через начало координат и их центры лежат на оси Oy, то уравнения окружностей имеют вид

$$x^2 + y^2 \pm 2Ry = 0.$$

Общему уравнению 2-й степени относительно x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

соответствует окружность тогда и только тогда, когда его коэффициенты A, B, C удовлетворяют двум условиям:

$$A = C \text{ и } B = 0,$$

т. е. когда оно может быть приведено к виду

$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0. \qquad (2)$$

При этом радиус R и координаты a и b центра окружности можно вычислить по формулам

$$R = \sqrt{D'^2 + E'^2 - F'}; \quad a = -D'; \quad b = -E'.$$

Возможны три случая:

1) $D'^2 + E'^2 - F' > 0$, уравнению (2) соответствует окружность;

2) $D'^2 + E'^2 - F' = 0$, уравнению (2) соответствует одна точка $C\,(a, b)$;

3) $D'^2 + E'^2 - F' < 0$, уравнению (2) не соответствует ни одна точка плоскости.

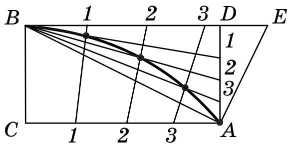


Рис. 63

Построение точек дуги окружности.

Если AC — половина хорды; CB — стрелка (рис. 63) дуги окружности, центр которой находится за пределами чертежа, то точки дуги (например, *1, 2, 3*) можно найти следующим построением. Проводим $BE \parallel AC$, $AD \perp AC$, $AE \perp AB$. Делим AC, AD и BE на одинаковое число равных частей и соединяем точки деления AC и BE, а также точку B с точками деления AD. Точки пересечения одинаково занумерованных прямых и будут точками искомой дуги окружности.

Эллипс. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная (равная $2a$).

Уравнение эллипса.

Если прямую F_1F_2 принять за ось Ox, а прямую, ей перпендикулярную и проходящую через середину отрезка F_1F_2 — за ось Oy (рис. 64), то получим *каноническое* уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0,\ b > 0), \qquad (3)$$

где a и b — *полуоси* эллипса. Эллипс, заданный уравнением (3), симметричен относительно координатных осей Ox и Oy.

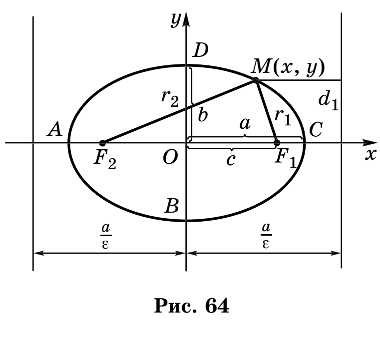


Рис. 64

Элементы эллипса (см. рис. 64).

Отрезок $AC = 2a$ — *большая ось*; отрезок $BD = 2b$ — *малая ось*; отрезок F_1F_2 — *фокальное расстояние*; отрезки $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ — *фокальные радиусы* точки M; точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — *фокусы эллипса* ($c \geqslant 0$); точки $A(-a, 0)$, $B(0 - b)$, $C(a, 0)$ и $D(0, b)$ пересечения эллипса с осями координат — его *вершины*; точка O (начало координат) — его *центр*. Величины a, b, c эллипса связаны соотношениями:

$$c < a, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Эксцентриситетом эллипса (он обозначается буквой ε) называется отношение фокального расстояния ($2c$) к длине большой оси ($2a$):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \ (\varepsilon \geqslant 0).$$

Эксцентриситет всякого эллипса меньше единицы ($\varepsilon < 1$). Чем меньше отличается ε от единицы, тем эллипс более вытянут.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 точки $M(x,y)$ эллипса вычисляются по формулам:

$$r_1 = a - \varepsilon x; \quad r_2 = a + \varepsilon x; \quad r_1 + r_2 = 2a.$$

Директрисами эллипса называются две прямые, перпендикулярные его большой оси и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него. *Уравнения директрис эллипса*:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon} \ (\varepsilon > 0).$$

Уравнение касательной к эллипсу, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Касательная к эллипсу является биссектрисой угла между продолжением фокального радиуса F_1M и фокальным радиусом F_2M.

Площадь эллипса: $S = \pi ab$.

Периметр эллипса:

$$L = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right],$$

где ε — эксцентриситет эллипса.

Связь эллипса с окружностью.

Уравнение окружности (1) является частным случаем канонического уравнения эллипса (3) при $a = b$. Для окружности $\varepsilon = 0$; следовательно, окружность есть частный случай эллипса, полуоси которого равны между собой (эксцентриситет ε которого равен нулю).

Ортогональная проекция окружности на произвольную плоскость является эллипсом.

Построение эллипса по точкам.

1. *Способ двух окружностей*. Если известны длины полуосей эллипса a и b ($a > b$), то из начала координат O, как из центра, описываем две концентрические окружности радиусами a и b (рис. 65). Проводим произвольный радиус OC большой окружности. Из точки C проводим прямую, параллельную оси Oy, а из точки D пересечения OC с малой окружностью — прямую, параллельную оси Ox. Точка M пересечения этих прямых и есть точка эллипса. Аналогично строим и другие точки эллипса.

2. *Способ проективных пучков*. Строим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ с центром в начале координат и со сторонами, равными $2a$ и $2b$ (рис. 66). Отрезки OC и CD_1 делим на одинаковое число равных частей и затем из точек B и D проводим два пучка лучей. Точки пересечения одинаково занумерованных лучей и являются точками эллипса. Остальные четверти эллипса строятся аналогично.

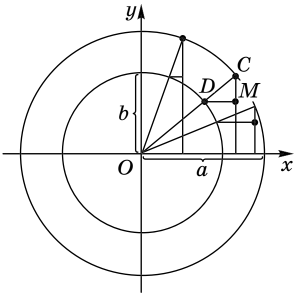


Рис. 65

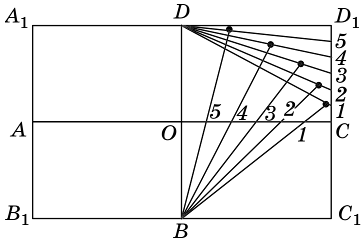


Рис. 66

Гипербола. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная (равная $2a$).

Уравнение гиперболы.

Если прямую F_1F_2 принять за ось Ox, а прямую, ей перпендикулярную и проходящую через середину отрезка F_1F_2, — за ось Oy (рис. 67), то получим *каноническое* уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

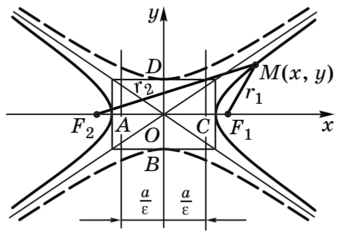


Рис. 67

где a и b — полуоси гиперболы ($a > 0$, $b > 0$). Гипербола, заданная уравнением (4), симметрична относительно координатных осей Ox и Oy.

Элементы гиперболы (см. рис. 67).

Гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой); отрезок $AC = 2a$ — *действительная ось* (пересекает гиперболу), отрезок $BD = 2b$ — *мнимая ось* (не пересекает гиперболы), отрезок $F_2F_1 = 2c$ — *фокальное расстояние*, отрезки $F_1M = r_1$ и $F_2\,M = r_2$ — *фокальные радиусы* точки M; точки $F_1(c,\ 0)$ и $F_2(-c,\ 0)$ — *фокусы гиперболы*;

точки $A(-a, 0)$ и $C(a, 0)$ пересечения гиперболы с ее действительной осью — ее *вершины*; точка O (начало координат) — ее *центр*. Величины a, b, c гиперболы связаны соотношениями:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (c > a).$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокального расстояния ($2c$) к длине большой оси ($2a$):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Эксцентриситет всякой гиперболы больше единицы ($\varepsilon > 1$). Чем меньше отличается от единицы эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут так называемый *основной* прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы, центр которого совпадает с центром гиперболы.

Фокальные радиусы точки гиперболы с абсциссой x вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \varepsilon x, \\ r_2 &= \ \ a + \varepsilon x \end{aligned}\right\} \text{ для точек правой ветви гиперболы;}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \ \ a - \varepsilon x, \\ r_2 &= -a - \varepsilon x \end{aligned}\right\} \text{ для точек левой ветви гиперболы.}$$

Директрисами гиперболы называются две прямые, перпендикулярные ее действительной оси и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него. *Уравнения директрис гиперболы*:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}; \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Асимптотами гиперболы называются прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$. Направления асимптот совпадают с направлениями диагоналей основного прямоугольника.

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Уравнение касательной к гиперболе, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Касательная к гиперболе является биссектрисой угла между фокальными радиусами точки касания. Для любой точки M гиперболы отрезок касательной между асимптотами делится пополам в точке касания.

Сопряженные гиперболы.

Если гипербола задана уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то ее действительная ось расположена на оси Oy, а мнимая ось — на оси Ox (на рис. 67 эта гипербола изображена пунктиром). Вершинами этой гиперболы будут точки $D(0, b)$ и $B(0, -b)$, а асимптотами — асимптоты гиперболы (4).

Две гиперболы, определяемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называются *сопряженными*.

У сопряженных гипербол действительная ось одной является мнимой осью другой, мнимая же ось одной является действительной осью другой. Сопряженные гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Равносторонняя гипербола.

Это гипербола с равными полуосями ($a = b$). Ее уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны. Их уравнения

$$y = x, \quad y = -x.$$

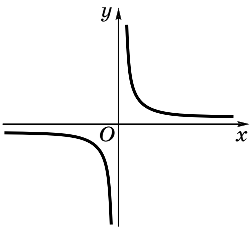


Рис. 68

Равносторонние гиперболы имеют эксцентриситет

$$\varepsilon = \sqrt{2}.$$

Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы (рис. 68), то ее уравнение примет вид

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

или, если ввести обозначение $\frac{a^2}{2} = m$, то

$$y = \frac{m}{x}.$$

Таким образом, равносторонняя гипербола в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, представляет собой г р а ф и к обратной пропорциональной зависимости.

Построение точек гиперболы по заданным ее полуосям.

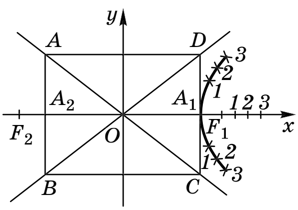


Рис. 69

Строим прямоугольник ABC с центром O и со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 69). Проводим диагонали AC и BD прямоугольника. На оси Ox от точки O откладываем отрезки OF_1 и OF_2, равные OA (половине диагонали). Точки F_1 и F_2 — фокусы искомой гиперболы. Затем отмечаем на оси Ox произвольные точки *1, 2, 3* и т. д., из фокуса F_1 описываем дуги радиусами $A_1 1$, $A_1 2$, $A_1 3$ и т. д. и из фокуса F_2 — дуги радиусами $A_2 1$, $A_2 2$, $A_2 3$ и т. д., точки *1, 2, 3* и т.д. пересечения соответственных дуг будут точками гиперболы. Выбирая точки на оси Ox левее фокуса F_2, построим аналогично точки левой ветви гиперболы.

Парабола. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Уравнение параболы.

Если прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе AB, выбрать за ось Ox, причем за положительное направление на ней взять направление от директрисы к фокусу (рис. 70), а за начало координат принять середину O отрезка FK, то *каноническое* уравнение параболы примет вид

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

где p — *фокальный параметр* параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

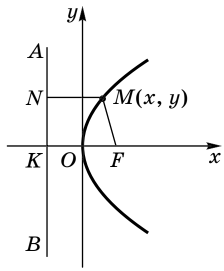


Рис. 70

Парабола, заданная уравнением (5), симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.

Элементы параболы (см. рис. 70).

Ось Ox — *ось параболы*, O — ее *вершина*, точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ — ее *фокус*, отрезок $FM = r$ — *фокальный радиус* точки M параболы; AB — *директриса параболы* (директриса и фокус находятся по разные стороны от вершины параболы на одинаковом расстоянии от нее).

В отличие от эллипса и гиперболы *парабола не имеет центра*.

Эксцентриситет всякой параболы равен единице ($\varepsilon = 1$).

Фокальный радиус r точки $M(x, y)$ параболы вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Уравнение директрисы параболы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Уравнение касательной, проведенной к параболе в точке $M(x_1, y_1)$:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Касательная к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом точки параболы и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису.

Длина дуги OM параболы (считая от вершины O до точки M с координатами x, y)

$$\cup OM = s \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0), \qquad (6)$$

правая часть которого есть квадратный трехчлен, представляет собой *уравнение параболы, ось которой параллельна оси Oy* (рис. 71). Парабола будет восходящей при $a > 0$ и нисходящей при $a < 0$. Параметр p и координаты x_0 и y_0 вершины O параболы, заданной уравнением (6), вычисляются по формулам:

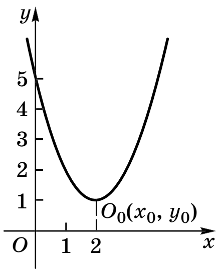


Рис. 71

$$2p = \frac{1}{|a|}; \quad x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

На рис. 71 изображена парабола, заданная уравнением

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Координаты ее вершины O таковы:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2, \quad y_0 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - 16}{4 \cdot 1} = 1.$$

Построение параболы по точкам способом *проективных пучков*.

Если заданы ось параболы (ось Ox), вершина O параболы и какая-нибудь ее точка A (рис. 72), то точки параболы можно найти следующим построением. Перпендикуляры AB и AC, опущенные из точки A на оси координат, делим на одинаковое число равных частей и нумеруем, как показано на рис. 72. Точку O соединяем затем с точками деления отрезка AC и из точек деления отрезка AB проводим прямые, параллельные оси Ox, до пересечения с соответственно занумерованным лучом из O. Точки пересечения одинаково занумерованных отрезков и будут точками искомой параболы.

Точки нижней половины параболы строятся аналогично.

Общие свойства кривых второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются *кривыми второго порядка* потому, что в декартовой прямоугольной системе координат они определяются алгебраическими уравнениями второй степени относительно x и y.

Геометрическое место точек M (x, y), для каждой из которых отношение расстояния r до некоторой точки F (*фокуса*) к расстоянию d до некоторой прямой (*директрисы*) — величина постоянная (равная ε), $\frac{r}{d} = \varepsilon$ есть кривая второго порядка с эксцентриситетом, равным ε. При $\varepsilon < 1$ это будет *эллипс*, при $\varepsilon > 1$ — *гипербола*, при $\varepsilon = 1$ — *парабола*.

Конические сечения.

Кривые второго порядка называются иначе *коническими сечениями*, так как они могут быть получены как линии пересечения поверхности кругового конуса с плоскостью (не проходящей через вершину конуса). Коническая поверхность мыслится неограниченно продолженной в обе стороны от вершины и, следовательно, состоящей из двух полостей (рис. 73).

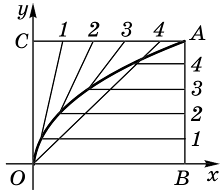


Рис. 72

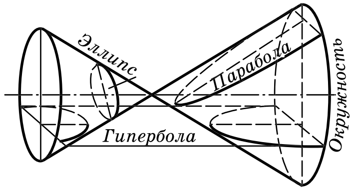


Рис. 73

Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса и не параллельна ни одной из его образующих, то сечение будет *эллипсом* (или, в частности, *окружностью*).

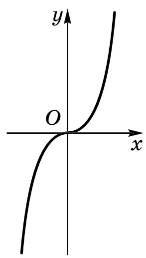
Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса и параллельна одной из образующих, то сечение будет *параболой*.

Если секущая плоскость пересекает обе полости конуса, то сечение будет *гиперболой*.

22. Некоторые замечательные кривые

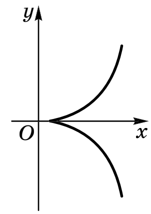
1. *Кубическая парабола*

$$y = ax^3.$$



2. *Полукубическая парабола*

$$y = ax^{3/2}.$$

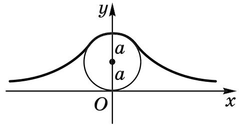


3. *Верзьера Аньези*

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a},$$

или

$$\begin{cases} x = 2a \operatorname{ctg} \theta, \\ y = 2a \sin^2 \theta. \end{cases}$$

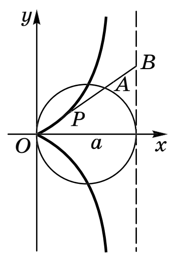


4. *Циссоида Диокла*

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x},$$

или

$$\rho = a(\sec \theta - \cos \theta)$$
$$(OP = AB).$$

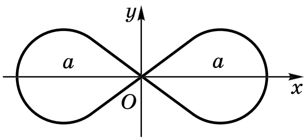


5. *Лемниската Бернулли*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2),$$

или

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$



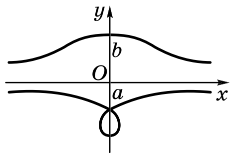
6. *Конхоида Никомеда*

$$x^2y^2 = (y + a)^2\,(b - y^2),$$

или

$$\rho = a \operatorname{cosec} \theta \pm b$$

(на рисунке $a < b$).

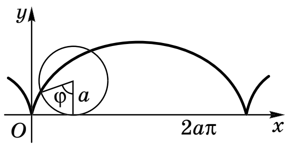


7. *Обыкновенная циклоида*

$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} \pm \sqrt{2ay - y^2},$$

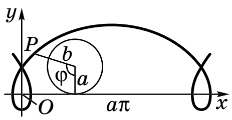
или

$$\begin{cases} x = a\,(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a\,(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$



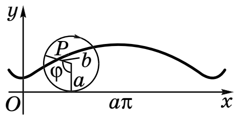
8. *Удлиненная циклоида*

$$\begin{cases} x = a\varphi - b\sin\varphi, \\ y = a - b\cos\varphi \end{cases} \quad (a < b).$$



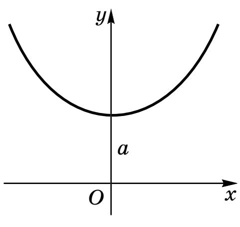
9. *Укороченная циклоида*

$$\begin{cases} x = a\varphi - b\sin\varphi, \\ y = a - b\cos\varphi \end{cases} \quad (a > b).$$



10. *Цепная линия*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

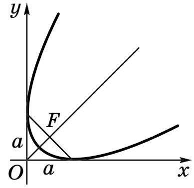


11. *Парабола*

$$\pm x^{1/2} \pm y^{1/2} = a^{1/2},$$

или

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - {}$$
$$- 2ay + a^2 = 0.$$

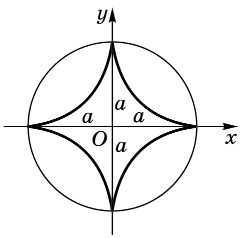


12. *Гипоциклоида с четырьмя ветвями (астроида)*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

или

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \quad (a > 0).$$

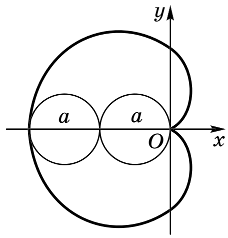


13. *Кардиоида*

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

или

$$\rho = a(1 - \cos\theta).$$



14. *Декартов лист*

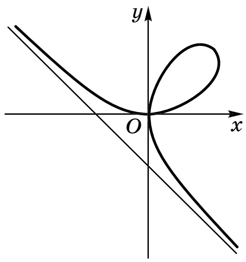
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

или

$$\rho = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta},$$

или

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}. \end{cases}$$

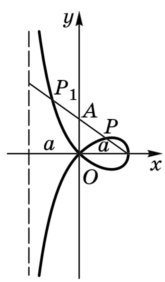


15. *Строфоида*

$$y^2 = x^2\,\frac{a - x}{a + x},$$

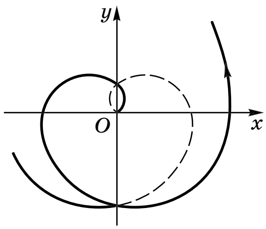
или

$$\rho = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$



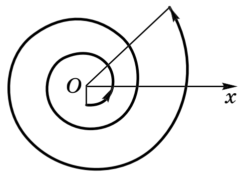
16. *Архимедова спираль*

$$\rho = a\theta.$$



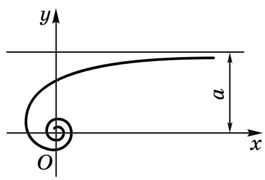
17. *Логарифмическая спираль*

$$\rho = ae^{k\theta}.$$



18. *Гиперболическая спираль*

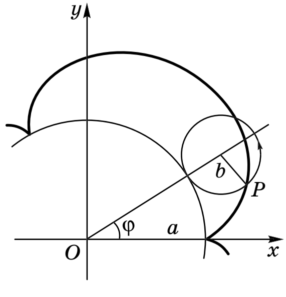
$$\rho = \frac{a}{\theta}.$$



19. *Эпициклоида*

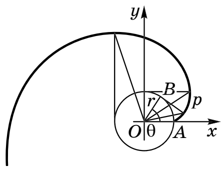
$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right), \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right). \end{cases}$$

При $a = b$ получаем кардиоиду (см. кривую п. 13).



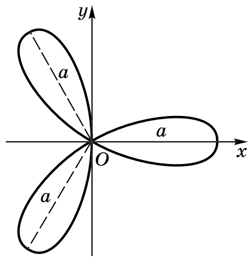
20. *Развертка окружности*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta + \rho\, \theta \sin \theta, \\ y = \rho \sin \theta - \rho\, \theta \cos \theta. \end{cases}$$



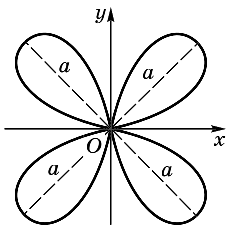
21. *Трехлепестковая роза*

$\rho = a \cos 3\theta.$



22. *Четырехлепестковая роза*

$\rho = a \sin 2\theta.$



23. Векторы

Определения. Две различные точки A и B образуют вектор (рис. 74), если известно, что точка A — первая (*начало* вектора), а точка B — вторая (*конец* вектора).

Обозначения: $\overrightarrow{AB}$, **a**, $\vec{a}$ и т. п.

Вектор имеет две характеристики: длину отрезка AB, которая обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ и называется *модулем*, или *длиной вектора*, и *направление*, определяемое лучом AB в пространстве. Если точки A и B совпадают, то $\overrightarrow{AB}$ тоже можно считать вектором; его называют *нулевым* или *нуль-вектором*.

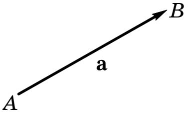


Рис. 74

Наряду с векторами рассматривают величины, не связанные с направлением, для определения которых достаточно указать некоторое действительное число. Эти величины называют *скалярами*.

Ф и з и ч е с к и е   п р и м е р ы: масса тела, температура тела в точке, работа, мощность — скаляры; скорость движения материальной точки, действующая на тело сила, напряженность поля в точке — векторы.

Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*.

Векторы, лежащие в одной плоскости, называются *компланарными*. *Взаимно противоположные* векторы равны по длине и противоположны по направлению:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BA} = -\mathbf{a}.$$

Обычно в математике рассматриваются векторы, в качестве начала которых можно выбрать любую точку. Эти векторы называются *свободными* в отличие от *связанных* векторов, рассматриваемых в некоторых разделах механики. Связанные векторы могут быть *закрепленными* — начало закреплено в некоторой точке, *скользящими* — допускается перенос начала только в точки, лежащие на прямой вдоль направления вектора.

Сложение и вычитание векторов. Чтобы сложить несколько векторов, нужно в конце первого построить вектор, равный второму, начало которого совпадает с концом первого, аналогично в конце второго построить вектор, равный третьему, и т. д. Вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего, называется *суммой* данных векторов (рис. 75).

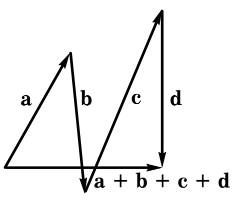


Рис. 75

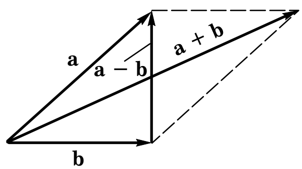


Рис. 76

Пусть **a** и **b** — два вектора. Перенесем их в общую точку и построим на этих векторах параллелограмм (рис. 76). Вектор диагонали, проходящий через общую их точку, — *сумма векторов* **a** и **b**; вектор второй диагонали, направленный к вектору **a**, — *разность* **a − b**.

Сложение и вычитание векторов обладают свойствами переместительности и сочетательности.

Проекции вектора на оси координат. *Проекция точки* на ось — соответствующая координата этой точки. Проекция $\overrightarrow{A'B'}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось — вектор, началом A' которого является проекция начала A вектора $\overrightarrow{AB}$ на эту ось, а концом B' — проекция конца B данного вектора $\overrightarrow{AB}$ на эту же ось.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось называют также длину вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятую со знаком «+», если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ имеет то же направление, что и ось, и со знаком «−», если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ имеет противоположное направление.

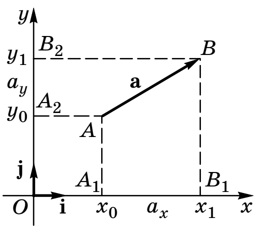


Рис. 77

Вектор может быть задан его проекциями на оси координат — *координатами вектора*:

$$\mathbf{a} = (a_x,\ a_y) = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0),$$

где $(x_0,\ y_0)$ — координаты начала, а $(x_1,\ y_1)$ — координаты конца данного вектора (рис. 77).

Модуль вектора:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,.$$

Сумма векторов $\mathbf{a} = (x_1,\ y_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2,\ y_2)$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2).$$

Разность векторов **a** и **b**:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1,\ y_1) - (x_2,\ y_2) = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2).$$

Умножение вектора на число. Скалярное произведение двух векторов. В результате умножения вектора $\mathbf{a}$ на число λ получается вектор $\lambda\mathbf{a}$, имеющий то же направление, что вектор $\mathbf{a}$, и длину $\lambda|\mathbf{a}|$. Если $\lambda > 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ одинаково направлены; если же $\lambda < 0$, то они противоположно направлены.

Произведение вектора на число удовлетворяет следующим свойствам:

$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda;$$

$$(\mu + \lambda)\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a};$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором. Векторы единичной длины, перпендикулярные друг другу, называются *ортами*. На плоскости два орта $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ определяют прямоугольную систему координат. Каждый вектор $\mathbf{a}$ на плоскости может быть единственным образом выражен через орты в виде

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j},$$

где λ и μ — действительные числа, являющиеся проекциями a_x и a_y вектора $\mathbf{a}$ на оси координат, т. е.

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}.$$

Задание a_x и a_y определяет единственный (свободный) вектор $\mathbf{a}$.

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число $\mathbf{ab}$, определяемое формулой

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}),$$

где $\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ обозначает косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Геометрический смысл: скалярное произведение $\mathbf{ab}$ равно проекции вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, умноженной на $|\mathbf{b}|$. Если $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ b_2)$, то

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Зная координаты векторов **a** и **b**, мы можем найти косинус угла между ними:

$$\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$;

2. $(\lambda\ \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab})$;

3. $(\lambda + \mu)\mathbf{ab} = \lambda\ \mathbf{ab} + \mu\mathbf{ab}$;

4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$.

Векторы **a** и **b** *перпендикулярны* (*ортогональны*) тогда и только тогда, когда $\mathbf{ab} = 0$.

VI. Элементы математического анализа

24. Функции и графики

Понятие функции. Понятия переменной величины и соответствия — базовые в математическом анализе. Будем рассматривать здесь только числовые переменные.

Определяя *переменную* x, указывают множество X, из которого переменная «черпает» свои значения. Запись

$$x \in X$$

в данном случае означает, что переменная x может принять любое значение из множества X.

Пусть $x \in X$ и $y \in Y$, где X и Y — множества действительных чисел. *Установить соответствие* между множеством X и множеством Y (обозначают: $X \to Y$), значит указать правило, по которому для каждого $x \in X$ определяются все соответствующие ему числа $y \in Y$. (Понятие соответствия между элементами множеств X и Y является базовым и не определяется.) Одному значению переменной x может соответствовать одно, несколько и даже бесконечно много значений переменной y, а может таких значений и не существовать вовсе.

П р и м е р ы.

1. Можно задать соответствие между множеством действительных чисел X и множеством действительных чисел Y, вычисляя для каждого $x \in X$ значение $y = \sin x$. В этом случае каждому $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$. Однако не все значения множества Y будут при этом «задействованы», так как $|\sin x| \leqslant 1$.

2. Если для каждого действительного значения $x \in X$ вычислять значения $y = \operatorname{tg} x$, то для чисел $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, соответствующих им действительных значений $y \in Y$ не будет. Остальным значениям x будут соответствовать единственные значения y.

3. Зададим соответствие между множествами действительных чисел X и Y следующим образом: каждому $x \in X$ ставятся в соответствие значения $y \in Y$ такие, что удовлетворяется равенство

$$x^2 + y^2 = 1.$$

При этом каждому значению $|x| < 1$ соответствуют два значения: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$; значениям $x = 1$ и $x = -1$ соответствует единственное значение $y = 0$; значениям $|x| > 1$ не соответствует ни одного значения y.

4. Каждому действительному значению $x \in X$ можно поставить в соответствие действительное значение $y \in Y$ такое, что $y = x^3$. При этом каждому действительному числу x $(x \in \boldsymbol{U})$ будет соответствовать единственное действительное число y $(y \in \boldsymbol{U})$ и не окажется ни одного действительного значения y, которое не было бы поставлено в соответствие своему значению x. Более того, каждому y будет соответствовать одно и только одно значение x.

Соответствие $X \to Y$, при котором каждому $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$, называется *однозначным*. При однозначном соответствии $X \to Y$ одно и то же значение переменной y может соответствовать различным значениям переменной x. Однозначными являются соответствия из примеров 1 и 4. Если в качестве X рассматривать множество $\boldsymbol{R}$ с исключенными из него числами $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, где $k \in \boldsymbol{U}$, то соответствие между X и Y тоже будет однозначным. Наряду с соответствием $X \to Y$ можно рассматривать обратное ему соответствие $Y \to X$. Если соответствие $X \to Y$ обозначить символом f, то можно записать $X \xrightarrow{f} Y$, а обратное соответствие обозначить f^{-1} и записать $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$.

Если каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$ и, обратно, каждому значению $y \in Y$ соответствует одно и только одно значение $x \in X$, то говорят, что между X и Y установлено *взаимно однозначное соответствие* и записывают это так:

$$X \leftrightarrows Y, \text{ или } X \overset{f}{\leftrightarrows} Y.$$

Если соответствие $X \xrightarrow{f} Y$ однозначное, т. е. каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$, то соответствие f называют *числовой функцией* аргумента x и записывают $y = f(x)$; x называют *независимой* переменной; y — *зависимой* переменной; X — *областью определения* функции $f(x)$; Y — *областью значений* функции $f(x)$, если каждому $y \in Y$ соответствует хотя бы одно значение $x \in X$. Независимую переменную часто называют *аргументом*, а зависимую — *функцией*. Наряду с понятием «область значений» применяют эквивалентные понятия «множество значений», «область изменения» функции $f(x)$. Область определения функции $f(x)$ обозначают $D(f)$, а область значений этой функции — $E(f)$.

Переменные x и y можно рассматривать как декартовы координаты точек на плоскости. Множество всех точек плоскости xOy с координатами $(x, f(x))$, для которых $x \in X$, называется *графиком функции* $f(x)$ в декартовой системе координат. Аналогично определяется понятие графика функции в полярной системе координат.

Понятие функции позволяет формализовать многие процессы, происходящие в реальности. Например, путь s, пройденный автомобилем за время t, есть функция скорости v; интенсивность распада радиоактивного вещества данной массы есть функция времени; площадь круга — функция радиуса.

На практике не всегда можно выделить о д н у переменную, от которой только и зависит функция, а часто это бывает просто бесполезным. Поэтому в рассмотрение вводятся функции нескольких переменных. Например, мощность тока — функция силы тока и напряжения; скорость автомобиля — функция мощности его двигателя, массы, силы трения о грунт, лобового сопротивления воздуха и т. д.

Мы ограничимся рассмотрением функций одной переменной.

Способы задания функции. *Аналитический способ* — это способ задания функции формулами, математическими символами, которые представляют собой удобную запись известных нам математических операций: сложения, вычитания, деления, отыскания тригонометрических функций, возведения в степень и т. д. По мере развития наших знаний к этим операциям присоединяются новые.

Аналитический способ задания функции не является единственным. Часты случаи, когда невозможно найти аналитическое выражение для функции.

Распространены табличный и графический способы задания функций.

Табличный способ применяется в тех случаях, когда непосредственное вычисление значения функции по ее аналитическому выражению требует большой затраты времени.

Графический способ задания функции нашел широкое применение в различных самопишущих технических приборах и ЭВМ.

Обозначения. Наряду с обозначением $y = f(x)$ применяют и другие обозначения функции или *функциональной зависимости*: $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ и т. д. Здесь x — аргумент; y — функция; F, φ — различные символы функциональной зависимости.

Частное значение функции $y = f(x)$, соответствующее заданному значению $x = a$ независимой переменной, обозначается так: $f(a)$. Например, если

$$f(x) = x^2 + \sqrt{3x + 10},$$

то

$$f(2) = 2^2 + \sqrt{3 \cdot 2 + 10} = 8.$$

Задание области определения и области значений функции. Область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ функции $f(x)$ могут состоять из отрезков, интервалов и отдельных числовых значений.

Интервал — множество действительных значений x, заключенных между двумя не совпадающими значениями $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, исключая сами эти значения a и b (рис. 78, a).

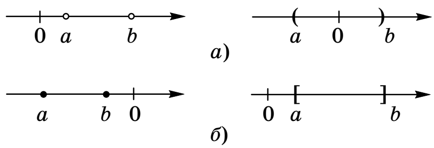


Рис. 78

О б о з н а ч е н и я: $x \in (a, b)$, $a < x < b$. Значения a и b называются *концами* интервала, а значения $x \in (a, b)$ — *внутренними точками* интервала.

Если x — любое число из $\boldsymbol{U}$, т.е. областью определения являются все действительные числа, то иногда пишут $x \in (-\infty, +\infty)$. Аналогичной записью пользуются, когда интервал не ограничен с одной стороны:

$$x \in (-\infty, b),\ x \in (a, +\infty).$$

Если к интервалу присоединим его концы a и b, то получим *отрезок* (рис. 78, *б*).

О б о з н а ч е н и я: $a \leqslant x \leqslant b$ или $x \in [a, b]$.

Отрезок и интервал называются *промежутками*.

Если к интервалу присоединим один из его концов (левый или правый), то получим *полуоткрытый* промежуток. О б о з н а ч е н и я: $[a, b)$ или $(a, b]$.

Зная аналитическое представление функции и свойства тех операций, которые его составляют, мы можем исследовать нашу функцию, в частности, найти ее область определения.

П р и м е р ы.

1. $\sqrt{x^2-1}$, область определения:

$$x \leqslant -1,\ x \geqslant 1, \text{ или } x \in (-\infty, -1] \cap [1, +\infty)$$
$$(x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \geqslant 0).$$

2. $\dfrac{1}{\ln x}$, область определения:
$x > 0$, $x \neq 1$, или $x \in (0, 1) \cap (1, +\infty)$
$(x > 0, \ln x \neq 0)$.

3. $\ln(x^2 - 2x + 7)$, область определения — вся ось:

$$-\infty < x < +\infty, \text{ или } x \in (-\infty, +\infty)$$
$$(x^2 - 2x + 7 > 0 \text{ при всех } x).$$

4. $\ln \arcsin x$, область определения: $0 < x \leqslant 1$, или $x \in (0, 1]$ (функция $\arcsin x$ требует изменения x в интервале $[-1, 1]$, а $\ln \arcsin x$ — положительности $\arcsin x$).

Следует помнить, что если функция получена в результате исследования некоторого конкретного процесса, то надо исходить из условий, при которых этот процесс протекает, а не ограничиваться формальными подсчетами. Например, исследуя зависимость линейного расширения алюминия от температуры, пользуются приближенной формулой: $l = |\alpha(t - t_0) + 1|\, l_0$. Однако бессмысленно рассматривать значения $t > 658$ °C, так как при 658 °C алюминий плавится и говорить о его линейном расширении нельзя.

Окрестностью точки $x = x_0$ называется всякий интервал, для которого точка x_0 является внутренней.

Если областью определения функции являются в с е действительные числа, то говорят, что функция определена на всей числовой оси или в интервале «от минус бесконечности до плюс бесконечности». О б о з н а ч е н и е:

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{или} \quad (-\infty, +\infty).$$

Классификация функций. Функция, заданная формулой (уравнением), называется *явной*, если данное уравнение разрешено относительно функции. Пример явной функции:

$$y = x^2 - \sqrt{1 - x}\,.$$

Функция называется *неявной*, если задающее ее уравнение не разрешено относительно функции. Пример неявной функции:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Элементарными называются функции, определенные формулами, содержащими к о н е ч н о е число операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, взятия логарифма, вычисления тригонометрических функций. Все эти операции могут производиться над аргументом, функцией, постоянными величинами — *параметрами*.

Элементарные функции делятся в основном на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*.

Простейшие типы алгебраических функций.

1. Целая функция (*многочлен* или *полином*):

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}\,x + a_n,$$

над аргументом x производятся только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в целую положительную степень.

Примеры целых функций: $y = a$ (*постоянная*), $y = ax + b$ (*линейная функция*), $y = ax^2 + bx + c$ (*квадратичная функция*) — везде $a \neq 0$.

2. Дробная (*рациональная*) *функция*: отношение двух целых функций. Наиболее простым примером дробной функции является функция $y = \frac{m}{x}$.

3. Иррациональная функция: над аргументом x производится еще действие извлечения корня.

Простейшие типы трансцендентных функций.

1. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0)$. На рис. 79 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$; они симметричны относительно оси Oy.

2. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$. На рис. 80 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $\log_{1/2} x$.

3. Тригонометрические функции: $y = \sin x$ (рис. 81), $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 82), $y = \sec x$ (рис. 83), $y = \cos x$ (рис. 84), $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 85), $y = \operatorname{cosec} x$ (рис. 86).

4. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

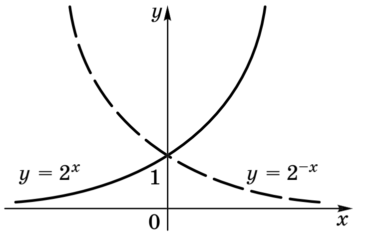


Рис. 79

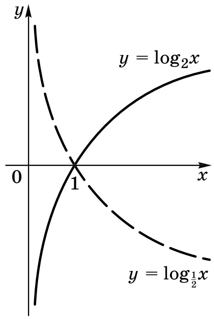


Рис. 80

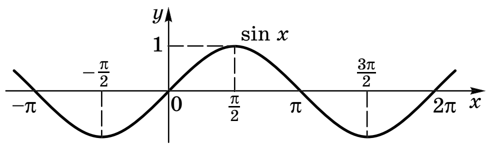


Рис. 81

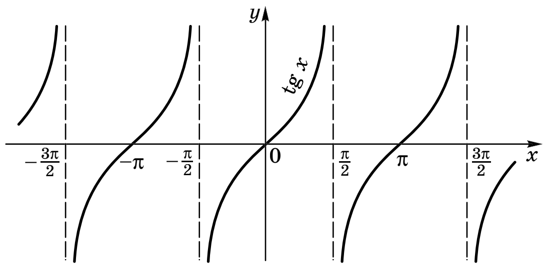


Рис. 82

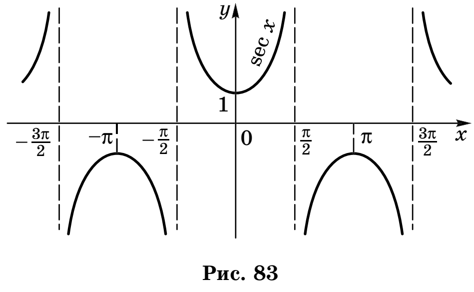


Рис. 83

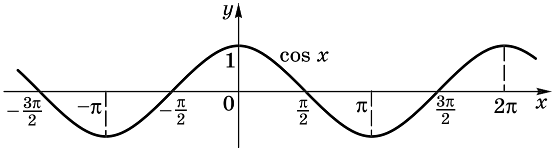


Рис. 84

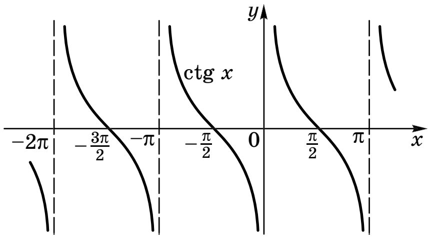


Рис. 85

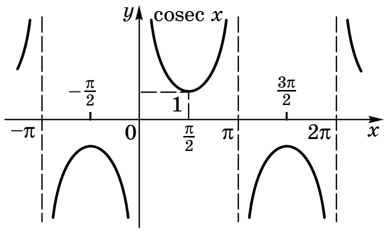


Рис. 86

На рис. 87 сплошной линией изображен график функции $y = \arcsin\ x$. Пунктиром показаны обратные функции, соответствующие двум соседним интервалам монотонности синуса. На рис. 88 сплошной линией выделен график функции $y = \arccos x$. На рис. 89 и 90 изображены соответственно графики $y = \mathrm{arctg}\ x$ и $y = \mathrm{arcctg}\ x$, а на рис. 91 и 92 — соответственно графики $y = \mathrm{arcsec}\ x$ и $y = \mathrm{arccosec}\ x$.

Пунктиром показаны обратные функции, соответствующие двум соседним интервалам монотонности исходной тригонометрической функции.

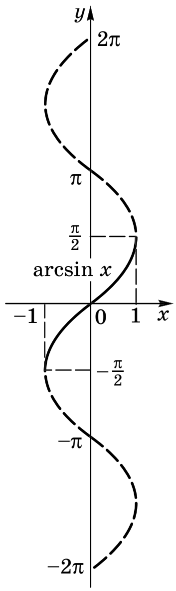


Рис. 87

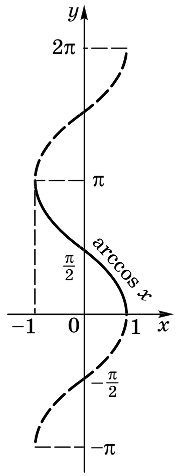


Рис. 88

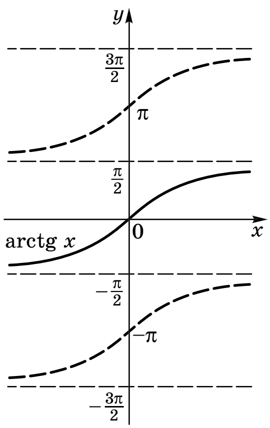


Рис. 89

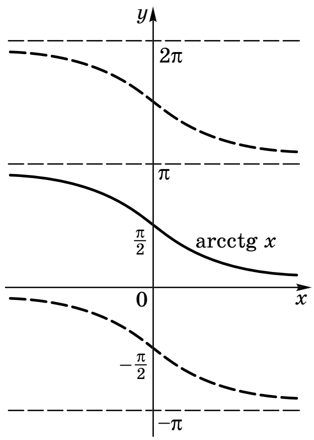


Рис. 90

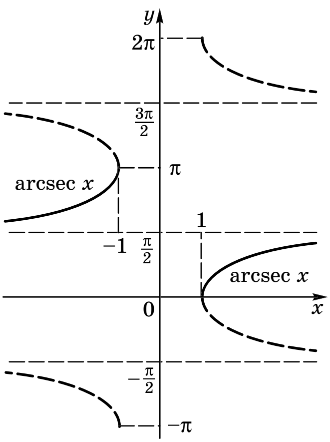


Рис. 91

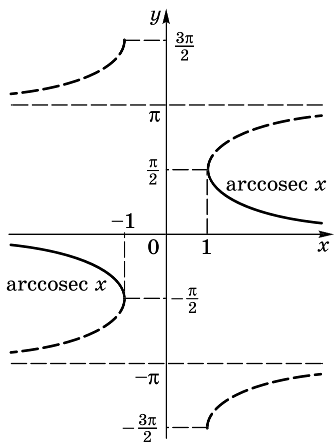


Рис. 92

Взаимно обратные функции. Для характеристики функции совершенно не существенно, какой буквой обозначаются сама функция и ее аргумент. Например, $y = x^2$ и $u = v^2$ — это одна и та же функциональная зависимость. Если между значениями $x \in X$ и $y \in Y$ установлено взаимно однозначное соответствие $y = f(x)$, то это же соответствие можно записать в виде $x = g(y)$. Функции f и g называют *взаимно обратными*, т. е. g — обратная функция к f, а f — обратная функция к g. Обозначают: $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$.

Например, пусть задана функция $u = v^3$. Если поменять ролями аргумент и функцию, то v будет функцией u и изобразится формулой $v = \sqrt[3]{u}$. Обозначая в обоих случаях аргумент буквой x, а функцию — буквой y, получим две взаимно обратные функции:

$$y = x^3 \quad \text{и} \quad y = \sqrt[3]{x}.$$

Взаимно обратными являются также функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Монотонность. Четность. Периодичность. Ограниченность. Функция называется *возрастающей* в некотором интервале, если для любых двух значений x_1, x_2 аргумента из этого интервала она определена и значения функции удовлетворяют условию

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Если же при любых $x_2 > x_1$ из этого интервала будет $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, то функцию $f(x)$ называют *неубывающей* на данном интервале.

Функция называется *убывающей* в некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1,$$

и *невозрастающей* на этом интервале, если при любых x_1 и x_2 таких, что $x_2 > x_1$, будет $f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

Если функция либо только возрастает, либо только убывает, либо является на данном интервале невозрастающей или неубывающей, то ее называют *монотонной*.

Четной называется функция $f(x)$, если, во-первых, для любого x из ее области определения значение $-x$ тоже принадлежит области определения, и, во-вторых, имеет место

$$f(-x) = f(x),$$

Примеры четной функции: $y = x^2 + 4$, $y = \cos x$. График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Нечетной называется функция, удовлетворяющая условию

$$f(-x) = -f(x),$$

где x и $-x$ принадлежат области определения функции $f(x)$. Примеры нечетной функции: $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^3 - x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Периодической называется функция $f(x)$, если для любого x из ее области определения значение $x + T$ также принадлежит этой области определения, и удовлетворяется условие $f(x + T) = f(x)$ для любого допустимого значения x. Наименьшее значение $T > 0$, удовлетворяющее этому условию, называется *периодом функции*. Примеры периодических функций:

1) $y = \sin x$; ее период $T = 2\pi$, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;

2) $y = \operatorname{tg} x$; ее период $T = \pi$, так как $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

В обоих случаях значение T — наименьшее.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если существует такая постоянная величина $A > 0$, что $|f(x)| \leqslant A$ при любом значении аргумента x. В противном случае функция $f(x)$ называется *неограниченной*. Аналогично определяется понятие: функция, *ограниченная на интервале* $a < x < b$ или на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Примеры:

1. Функция $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ ограниченная, так как при любых значениях x имеем $\left|\dfrac{1}{1 + x^2}\right| \leqslant 1$.

2. Функция $y = \sin\, x$ ограниченная, так как при любых значениях x имеем $|\sin\, x| \leqslant 1$.

3. Функция $y = \operatorname{tg}\, x$ ограничена на интервале $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ и не ограничена на интервале $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Преобразование графиков. Зная график функции $y = f(x)$ (рис. 93, *а*), можно построить графики функций $y = af(bx + c) + d$, а также графики функций $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$ и т. п. (см. табл. на с. 264 и рис. 93, *б* — *м*).

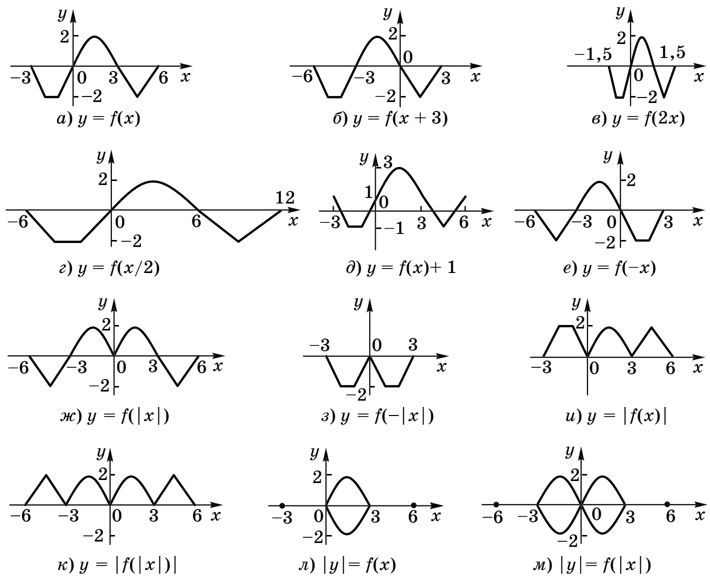


Рис. 93

График функции	Получается из графика исходной функции $f(x)$ с помощью преобразования
$f(x + c)$	При $c > 0$ сдвиг вдоль оси Ox *влево* на отрезок c; при $c < 0$ *сдвиг* вдоль оси *вправо* на $\|c\|$ (рис. 93, *б*)
$f(bx)$, $b > 0$	При $b > 1$ *сжатие* к оси Oy в b раз; при $0 < b < 1$ — *растяжение* от оси Oy в $1/b$ раз (рис. 93, *в, г*)
$y = f(x) + d$	При $d > 0$ *сдвиг вверх* на отрезок d; при $d < 0$ — *сдвиг вниз* на $\|d\|$ (рис. 93, *д*)
$y = f(-x)$	*Симметрия* относительно оси Ox (рис. 93, *е*)
$y = -f(x)$	*Симметрия* относительно оси Oy
$y = af(x)$, $a > 0$	При $a > 1$ — *растяжение* от оси Oy в a раз; при $0 < a < 1$ — *сжатие* к оси Oy в $1/a$ раз
$y = af(bx + c)$ ($a >1$, $b > 1$, $c > 0$)	Преобразуем к виду: $af\,[b\,(x + c/b)]$. Последовательно: *сжатие* к Ox в b раз, *сдвиг влево* на c/b *растяжение* от Oy в a раз
$y = f(\|x\|)$	В правой полуплоскости и на оси Ox график $f(x)$ не изменяется, в левой строится симметричный образ правой полуплоскости относительно Oy (рис. 93, *ж*)
$y = f(-\|x\|)$	В левой полуплоскости и на оси Oy график $f(x)$ не изменяется, в правой строится симметричный образ левой полуплоскости относительно Oy (рис. 93, *з*)
$y = \|f(x)\|$	Часть графика $f(x)$, лежащая в верхней полуплоскости и на оси Ox, не изменяется, часть графика $f(x)$, лежащая в нижней полуплоскости, симметрично отражается от оси Ox (рис. 93, *и*)
$y = \|f(\|x\|)\|$	В правой полуплоскости строят $\|f(x)\|$ и симметрично отражают от оси Oy, точки, лежащие на оси Oy не изменяются (рис. 93, *к*)
$\|y\| = f(x)$	Оставляют часть графика $f(x)$, лежащую над осью Ox и на оси Ox, и симметрично отражают ее от оси Ox, (рис. 93, *л*); появляются две изолированные точки $(-3, 0)$, $(6, 0)$)
$\|y\| = f(\|x\|)$	В правой полуплоскости оставляют часть графика $f(x)$, лежащую над осью Ox и на Ox и симметрично отражают ее от оси Ox, полученный график симметрично отражают от оси Oy. Добавляют точки графика $y = f(x)$, лежащие на оси Ox в левой полуплоскости (рис. 93, *м*)

25. Основы теории пределов

Бесконечно малая и бесконечно большая величины. Переменная величина α называется *бесконечно малой*, если она при своем изменении становится и в дальнейшем остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа ε:

$$|\alpha| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim \alpha = 0.$$

Переменная величина β называется *бесконечно большой*, если при своем изменении она становится и в дальнейшем остается по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа N:

$$|\beta| > N.$$

Простейшие свойства бесконечно малых.

1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
2. Произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.
3. Произведение постоянной величины на бесконечно малую, или произведение двух бесконечно малых, есть величина бесконечно малая.
4. Произведение любого постоянного числа сомножителей, среди которых хотя бы один есть величина бесконечно малая, а остальные — величины ограниченные (или постоянные), есть величина бесконечно малая.
5. Частное $\frac{\alpha}{a}$ (где α — бесконечно малая; $a \neq 0$ — конечная величина) есть величина бесконечно малая.
6. Частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых величин в зависимости от характера изменения делимого и делителя может быть или бесконечно малой, или конечной, или бесконечно большой величиной.

Если частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая (это значит, что $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$), то α называют *бесконечно малой высшего порядка*, *чем* β, и символически записывают:

$$\alpha = o(\beta).$$

Если частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых есть конечная величина, отличная от нуля (это значит, что $\lim \frac{\alpha}{\beta} = a \neq 0$), то α и β называют *бесконечно малыми одного и того же порядка* и символически записывают:

$$\alpha = O(\beta).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\alpha = O(\beta)$, то $\beta = O(\alpha)$.

Если же частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых есть величина бесконечно большая, то α называют *бесконечно малой низшего порядка, чем* β. В этом случае можно написать

$$\beta = o(\alpha).$$

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то целый прядок бесконечно малой a по сравнению с бесконечно малой b устанавливается так: находят последовательно пределы $\lim \frac{\alpha}{\beta^2}$, $\lim \frac{\alpha}{\beta^3}$ и т. д., и если обнаружится, что при каком-нибудь целом k $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = c$ отличен от нуля, то говорят, что *величина* α *имеет k-й порядок малости относительно бесконечно малой* β.

Главной частью бесконечно малой величины называется бесконечно малая, отличающаяся от данной на бесконечно малую более высокого порядка.

7. Бесконечно малые величины α и β одного и того же порядка называются *равносильными* или *эквивалентными*, если предел их отношения равен единице:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Разность двух эквивалентных бесконечно малых α и β есть обязательно бесконечно малая высшего порядка, чем α и β; поэтому каждая из двух эквивалентных бесконечно малых есть главная часть другой.

Связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

1. Если α — величина бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ — величина бесконечно большая.

2. Если β — величина бесконечно большая, то $\frac{1}{\beta}$ — величина бесконечно малая.

Предел функции. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x стремящемся к a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

если разность $f(x) - A = \alpha$ является бесконечно малой величиной, когда $x - a$ — бесконечно малая.

Если функция $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, имеет своим пределом число A, то $f(x)$ может быть представлена в виде суммы

$$f(x) = A + \alpha,$$

где α — величина бесконечно малая при $x \to a$.

Предел бесконечно малой величины равен нулю.

Для обозначения того факта, что функция $f(x)$ при приближении x к a неограниченно возрастает, используют обычно такую запись: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Если при x, стремящемся к a, функция $f(x)$ неограниченно убывает, то записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Запись $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ означает, что при неограниченно возрастающем аргументе x функция $f(x)$ стремится к пределу A.

Аналогичный смысл имеет запись $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Простейшие теоремы о пределах.*

ТЕОРЕМА 1. Предел постоянной величины c равен самой постоянной c:

$$\lim c = c.$$

ТЕОРЕМА 2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim\,[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x) - \lim f_3(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов:

$$\lim\,[f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x) \lim f_3(x).$$

ТЕОРЕМА 4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim cf(x) = c \lim f(x).$$

ТЕОРЕМА 5. $\lim[f(x)]^m = (\lim f(x))^m$;

$$\lim \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim f(x)}.$$

ТЕОРЕМА 6. Предел частного двух функций равен частному их пределов, если только предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}, \text{ если } \lim f_2(x) \neq 0.$$

---

*Здесь предполагается существование пределов у всех функций, участвующих в формулировках теорем.

ТЕОРЕМА 7. Если функция $f(x)$ заключена между двумя другими функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т. е.

$$f_1(x) < f(x) < f_2(x),$$

имеющими один и тот же общий предел A:

$$\lim f_1(x) = A, \quad \lim f_2(x) = A,$$

то функция $f(x)$ имеет тот же предел A, т. е.

$$\lim f(x) = A.$$

Некоторые замечательные пределы.

1. Числом e называется следующий предел:

$$\lim_{\beta \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\beta} = e,$$

или

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e.$$

Число e — трансцендентное. Приближенное его значение

$$e \approx 2,71828.$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}.$

3. Имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1; \ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Таким образом, переменные величины x и $\sin x$ (а также $\operatorname{tg} x$) при $x \to 0$ представляют собой пример эквивалентных бесконечно малых.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^m}{e^x} = 0$, где m — любое число.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, где $a > 0$ — постоянная.

Натуральные логарифмы.

Система логарифмов, в которой за основание принято число e, называется системой *натуральных* или *неперовых логарифмов*. Обозначение натуральных логарифмов:

$$\log_e N = \ln N.$$

Множитель $\lg e$ (десятичный логарифм числа e) называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным:

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343;$$

для обратного перехода служит величина:

$$\ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}3026.$$

Переход от натуральных логарифмов к десятичным и обратно:

$$\lg N \approx 0{,}4343 \ln N;$$
$$\ln N \approx 2{,}3026 \lg N.$$

Приращение функции. Разность между двумя значениями x_1 и x_2 независимой переменной x называется *приращением независимой переменной* и обозначается символом Δx (читается: «дельта икс»):

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Отсюда $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Если величины y_1 и y_2 суть значения функции $y = f(x)$, соответствующие значениям x_1 и x_2 независимой переменной x, т. е. $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, то разность $y_2 - y_1$ (рис. 94) называется *приращением функции*, соответствующим приращению Δx независимой переменной, и обозначается символом Δy:

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

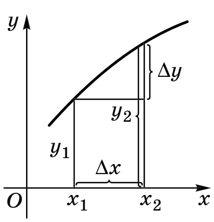


Рис. 94

Величины Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными.

Чтобы вычислить приращение Δy функции $y = f(x)$, надо в выражении функциональной зависимости заменить x на $x + \Delta x$, а y — на $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

и затем вычесть выражение $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* $v_{ср}$ изменения функции на интервале $(x,\ x + \Delta x)$.

Непрерывность функции. Дадим три равносильных определения непрерывной функции в точке.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1 (или при $x = x_1$), если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел приращения Δy функции, соответствующий приращению Δx аргумента, равен нулю при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)] = 0.$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_1$ равен значению функции при $x = x_1$, т. е. если

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке интервала $(a,\ b)$ (или $[a,\ b]$), называется *непрерывной на заданном интервале* (*отрезке*).

Если в некоторой точке x_0 какое-нибудь из условий непрерывности функции $y = f(x)$ не выполняется, то говорят, что *функция* $y = f(x)$ *претерпевает разрыв в точке* x_0 и точку x_0 называют *точкой разрыва функции*.

Непрерывность и точки разрыва элементарных функций.

Целые функции (*многочлены*) непрерывны при всех значениях x.

Дробные функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывны при всех значениях x, за исключением тех, которые обращают в нуль знаменатель $Q(x)$.

Иррациональные функции. Радикалы с целым положительным показателем из целых функций непрерывны при всех значениях x, принадлежащих области определения. Радикалы из дробных функций имеют те же точки разрыва. что и подкоренная функция.

Тригонометрические функции. Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при всех значениях x; функции $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ имеют точки разрыва при $x = \frac{(2n+1)n}{2}$; функции $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ разрывны при $x = n\pi$ (n — целое число).

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны при всех значениях x; функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ непрерывны при всех значениях x, принадлежащих области определения этих функций $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

Показательные функции e^x и a^x $(a > 0)$ непрерывны при всех значениях x.

Логарифмическая функция $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ непрерывна при всех $x > 0$ и стремится к $-\infty$ при $x \to 0$.

26. Основы дифференциального исчисления

Производная. Обозначения: y'; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $f'(x)$; $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

Производной функции $y = f(x)$ называется такая новая функция, которая при каждом значении независимой переменной x равна пределу отношения приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной x при произвольном стремлении Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Процесс вычисления производной от данной функции называется *дифференцированием* функции.

Геометрический смысл производной.

Значение производной $y' = f'(x)$ при заданном значении x_0 равно тангенсу угла, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки до касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 95):

$$y'_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Касательной к кривой в точке M_0 (рис. 96) называется предельное положение M_0T секущей M_0M, когда

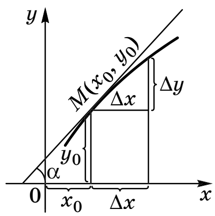


Рис. 95

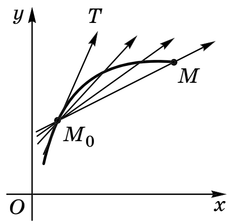


Рис. 96

точка M, перемещаясь вдоль кривой, стремится к совпадению с M_0.

Нормалью к кривой в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной к кривой в этой точке.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0\,(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ — значение производной от функции $y = f(x)$ при $x = x_0$.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$:

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Механический и физический смысл производной.

С помощью понятия производной легко определяются многие понятия математики и естествознания. Приведем примеры:

Мгновенная скорость неравномерного прямолинейного движения есть производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t, т. е. если $s = f(t)$, то $v = f'(t)$.

Замечание. По аналогии со скоростью движения говорят вообще о скорости изменения функции. Если величина y есть функция величины x, т. е. $y = f(x)$, то производную y' называют скоростью изменения величины y относительно величины x.

Угловая скорость вращения тела вокруг оси есть производная от функции, выражающей зависимость угла φ поворота тела относительно оси от времени.

Линейная плотность материальной линии (например, проволоки) в данной ее точке есть производная от функции, выражающей зависимость массы этой линии от ее длины.

Теплоемкость тела при данной температуре есть производная от функции, выражающей зависимость количества теплоты от температуры.

Скорость химической реакции есть производная от функции, выражающей зависимость массы вступившего в реакцию вещества от времени.

Сила тока есть производная от функции, выражающей зависимость количества протекшего электричества от времени.

Связь между существованием производной и непрерывностью функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную при $x = x_0$, то она непрерывна при этом значении x_0.

Обратное предложение, вообще говоря, оказывается неверным: функция, непрерывная в данной точке, может не иметь производной в этой точке. Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ непрерывна и не имеет в этой точке производной.

Второй производной функции $y = f(x)$, или *производной второго порядка*, называется производная от ее производной. Обозначения второй производной:

$$y''; \; f''; \; \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично определяются производные любого порядка. Обозначения производной n-го порядка:

$$y^{(n)}; \; f^{(n)}; \; \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Механический смысл второй производной. Ускорение a прямолинейного движения тела в данный момент времени есть вторая производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t, т. е. если $s = f(t)$, то $a = f''(t)$.

Основные правила и формулы дифференцирования.

Правила дифференцирования (здесь u, v, w — функции аргумента x, по которому производится дифференцирование).

1. *Производная алгебраической суммы*

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

2. *Производная произведения*

$$(uv)' = vu' + uv'; \; (uvw)' = vwu' + wuv' + uvw'.$$

В частности, если C — постоянная, то

$$(Cu)' = Cu'; \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \left(\frac{1}{C}u\right)' = \frac{1}{C}u'.$$

3. *Производная частного (дроби)*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \; (v \neq 0).$$

В частности,

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$$

4. *Производная сложной функции* (*функции от функции*). Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f[\varphi(x)]$, то

$$y' = f'(u)\,\varphi'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

В общем случае, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \text{ (\textit{цепное правило}).}$$

Таблица VI.1

Основные формулы дифференцирования

№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная
1	C (постоянная)	0	6	$\sin x$	$\cos x$
2	x^{α} (α – постоянная) Частные случаи:	$\alpha x^{\alpha-1}$	7	$\cos x$	$-\sin x$
	x	1	8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	a^x ($a > 0$ – постоянная)	$a^x \ln a$	11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	e^x	e^x	12	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
5	$\log_a x$ ($0 < a \neq 1$)	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$	13	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	14	x^x	$x^x(1 + \ln x)$
	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0,4343}{x}$			

Пример: $y = \mathrm{tg}^3\,4x$. Здесь $y = u^3$, $u = \mathrm{tg}\,v$, $v = 4x$. Имеем

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3\,\mathrm{tg}^2 4x,\ \frac{du}{dv} = \frac{1}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 4x};\ \frac{dv}{dx} = 4.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = 3\,\mathrm{tg}^2 4x\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4 = \frac{12\mathrm{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}.$$

Производные некоторых сложных функций. Если u — функция от x и a — постоянная, то

$$(u^a)' = au^{a-1}\,u'; \qquad (\mathrm{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \qquad (\mathrm{ctg}\,u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$(a^u)' = a^u \ln a' \cdot u'; \qquad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \qquad (\mathrm{arctg}\,u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \qquad (\mathrm{arcctg}\,u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

5. *Логарифмическое дифференцирование*. Часто для вычисления производной функции $y = f(x)$ эту функцию сначала логарифмируют, а затем дифференцируют. Результат логарифмического дифференцирования функции, т. е. выражение

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

называют *логарифмической производной* от функции y.

Пример. *Производная общей показательной функции* $y = u^v$ (u и v — функции от x; $u > 0$). Взяв натуральный логарифм от левой и правой частей равенства $y = u^v$, получим

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируем левую и правую части полученного равенства по правилам дифференцирования произведения и дифференцирования сложной функции

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

отсюда

$$y' = \left(v' \ln u + v\,\frac{u'}{u}\right) y = \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) u^v =$$
$$= u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}\,u'.$$

6. *Производная неявной функции.* Если функция y задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то для вычисления производной y' дифференцируем по x обе части уравнения, считая y функцией от x, и полученное в результате уравнение разрешаем относительно y'.

Пример. Найти y', если функция y задана неявно уравнением $xy^3 - 5x + 3y - 4 = 0$.

Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы, произведения, сложной функции и формулами дифференцирования, получим

$$1 \cdot y^3 + 3y^2y'\,x - 5 + 3y' = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{5 - y^3}{3y^2x + 3}.$$

7. *Производная обратной функции.* Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ взаимно обратны, то

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ или } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Производные n-го порядка от некоторых функций:

№ п/п	Функция	Производная n-го порядка
1	x^m	$m(m-1)(m-2)...(m-n+1)\,x^{m-n}$
2	a^x	$(\ln a)^n\,a^x$
3	e^{kx}	$k^n\,e^{kx}$
4	$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
5	$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
6	$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций (достаточный признак).

Если производная данной функции существует и положительна (отрицательна) для всех значений x в интервале $(a,\ b)$, то функция в этом интервале возрастает (соответственно убывает).

Максимумы и минимумы функции.

Точка $x = x_0$ называется *точкой* (относительного) *максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Точка $x = x_0$ называется *точкой* (относительного) *минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Для максимума и минимума функции, а также для значений функции в граничных точках ее области определения существует общее название — *экстремум*.

Необходимый признак существования максимума или минимума функции.

В точках максимума или минимума функции $y = f(x)$ ее производная $f'(x)$ (если она существует в этих точках) обращается в нуль:

$$f'(x) = 0.$$

Геометрический смысл.

В точках максимума (рис. 97) или минимума (рис. 98) касательная к графику функции, если касательная в этой точке существует, параллельна оси Ox.

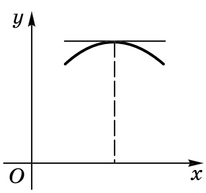


Рис. 97

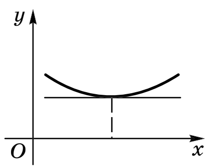


Рис. 98

Замечание 1. Не при всяком значении x_0, для которого производная $f'(x)$ равна нулю $[f'(x) = 0]$, функция $f(x)$ имеет максимум или минимум.

Замечание 2. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум и в точках разрыва своей производной $f'(x)$.

Корни уравнения $f'(x) = 0$ называются *стационарными точками*.

Отыскание точек максимума или минимума.

Для отыскания точек (относительных) максимума и минимума переменной величины поступают так:

1) выразив сообразно условию задачи данную переменную величину как функцию независимой переменной, находят производную этой функции (пусть (a, b) — область определения данной функции);

2) приравнивают производную нулю, решают полученное уравнение $f'(x) = 0$ и находят его корни (стационарные точки). Кроме них находят еще и точки разрыва производной $f'(x)$;

3) каждую из стационарных точек и точек разрыва производной исследуют на максимум и минимум одним из следующих двух способов.

Способ 1-й. Допустим, что функция $f'(x)$ непрерывная и $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — корни уравнения $f'(x) = 0$. В таком случае определяем знаки производной $f'(x) = 0$ в каждом из интервалов $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_k, b)$*.

Тем самым будет выяснено, изменяет ли и как именно производная знак при переходе (слева направо) через каждую из точек $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Если при переходе, например, через точку c_1 производная меняет знак с «−» на «+», то в точке c_1 функция имеет минимум, если с «+» на «−» — то максимум. Если же знак производной при переходе, например, через точку c_2 не меняется, то в этой точке функция не имеет экстремума.

---

* Для определения знака производной, например, в интервале (c_1, c_2) достаточно определить знак производной в какой-нибудь одной точке этого интервала (если $f'(x)$ непрерывна).

С п о с о б 2-й. Пусть функция $f'(x)$ непрерывная и дифференцируемая, а $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — корни уравнения $f'(x) = 0$. Находим вторую производную $f''(x)$ и определяем знак второй производной при каждом из значений $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Если в точке c_1

$$f''(c_1) < 0,$$

то в этой точке функция имеет максимум; если в точке c_2

$$f''(c_2) > 0,$$

то в этой точке функция имеет минимум; если же в точке c_3

$$f''(c_3) = 0,$$

то ничего определенного сказать нельзя. В последнем случае следует обратиться к первому способу отыскания экстремума функции.

Наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке.

Для отыскания наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ надо найти все максимумы (минимумы) этой функции на данном отрезке и значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на отрезке $[a, b]$. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет разрывы или перестает существовать, то необходимо исследовать дополнительно ее поведение вблизи точек разрыва и в граничных точках.

Выпуклость и вогнутость графика функции.

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) кверху, если ее произвольная дуга лежит *над* (*под*) хордой, стягивающей эту дугу. На рис. 99 дуга AC выпукла кверху, а дуга CB вогнута кверху. Выпуклая дуга лежит *под* любой своей касательной, а вогнутая — *над* любой своей касательной.

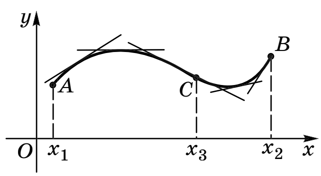


Рис. 99

Достаточный признак выпуклости и вогнутости функции.

Если вторая производная $f''(x)$ данной функции $f(x)$ положительна ($f''(x) > 0$) в интервале $(a,\ b)$, то функция в этом интервале вогнута кверху; если же в интервале $(a,\ b)$ $f''(x) < 0$ (отрицательна), то функция выпукла кверху.

Точки перегиба.

Точка, в которой кривая расположена по разные стороны своей касательной (например, точка C на рис. 99), называется *точкой перегиба*. Точка перегиба отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой ее части.

Необходимый признак существования точки перегиба.

В точках перегиба графика функции $y = f(x)$ ее вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль:

$$f''(x) = 0.$$

Замечание 1. Не при всяком значении x_0, для которого вторая производная обращается в нуль ($f''(x_0) = 0$), функция $f(x)$ имеет точку перегиба.

Замечание 2. Функция $y = f(x)$ может иметь точку перегиба и в точках разрыва второй производной $f''(x)$.

Отыскание точек перегиба.

Для отыскания точек перегиба графика функции $y = f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, где функция $f(x)$ дважды дифференцируема и имеет непрерывную вторую производную, необходимо:

1. Вычислить вторую производную $f''(x)$ данной функции.

2. Найти те значения x в интервале $(a,\ b)$, при которых $f''(x)$ обращается в нуль (т.е. решить уравнение $f''(x) = 0$) или имеет точку разрыва; пусть эти значения будут: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$.

3. Определить знак второй производной $f''(x)$ в каждом из интервалов $(a_1,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$, ..., $(x_k,\ b)$ (см. сноску на с. 280). Тем самым будет выяснено, изменяет ли вторая производная $f(x)$ знак при переходе через каждую из точек $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$. Изменение знака $f''(x)$, например, в

точке x_1, указывает, что при $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет точку перегиба. Если знак $f''(x)$ не изменяется, например, при переходе через точку x_2, то при $x = x_2$ функция не имеет точки перегиба.

4. Если при $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет точку перегиба, то, определив значение функции $f(x_1)$ в этой точке, мы найдем координаты точки перегиба $(x_1, f(x_1))$.

Схема построения графика функции. Для построения графика функции $y = f(x)$ последовательно находят:

1) область определения функции $f(x)$, точки разрыва, точки пересечения с осями координат, оси и центры симметрии графика (выясняют четность, нечетность и периодичность функции);

2) точки максимума и минимума функции $f(x)$, участки возрастания и убывания функции;

3) значения x, при которых график имеет точки перегиба, участки выпуклости и вогнутости функции $f(x)$;

4) координаты «опорных» точек графика функции $f(x)$, вычисляя значения самой функции $f(x)$, отвечающие всем найденным значениям x.

Наносят на чертеж все найденные точки и, принимая во внимание все результаты исследования, вычерчивают график данной функции.

Кривизна кривой и радиус кривизны. Круг и центр кривизны.

Средней кривизной $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1 называется отношение величины угла $\Delta\varphi$ между касательными, проведенными в точках M и M_1 дуги («угла смежности»), к длине Δs этой дуги (рис. 100):

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

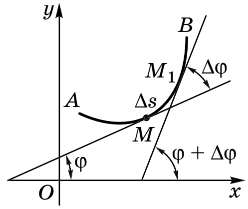


Рис. 100

Средняя кривизна характеризует степень искривленности дуги в целом.

Кривизной K кривой в точке M называется предел средней кривизны $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1, когда длина дуги MM_1 стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Радиусом кривизны R в точке M кривой называется величина, обратная кривизне:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Для *окружности радиуса* a кривизна и радиус кривизны постоянны, причем

$$K = \frac{1}{a}; \quad R = a.$$

Для *прямой* линии

$$K = 0; R = \infty.$$

Для прочих кривых значения кривизны и радиуса кривизны меняются от точки к точке.

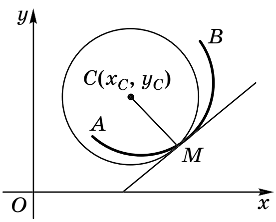


Рис. 101

Проведем в точке M (рис. 101) нормаль к кривой AB и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MC, равный по величине радиусу кривизны R. Полученная при этом точка $C(x_C, y_C)$ называется *центром кривизны*, а круг с центром C и радиусом CM — *кругом кривизны*. Круг кривизны дает наглядное представление о степени искривления кривой в данной точке.

Формулы для кривизны K, радиуса кривизны R и координат центра кривизны x_C, y_C.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и функция f дважды дифференцируема, то

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}; \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''};$$

$$x_C = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}; \quad y_C = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Дифференциал. Если первая производная $f'(x)$ существует и не равна нулю, то приращение Δy функции $y = f(x)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x;$$

$\alpha\Delta x$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ этой суммы — главная часть приращения функции, пропорциональная приращению независимой переменной Δx, она называется *дифференциалом функции* $f(x)$ и обозначается $\mathrm{d}y$, или $\mathrm{d}f(x)$. Итак,

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x. \qquad (1)$$

Частный случай. Дифференциал линейной функции равен приращению этой функции.

Дифференциалом $\mathrm{d}x$ *независимой переменной* x называют само приращение Δx независимой переменной:

$$\mathrm{d}x = \Delta x.$$

Теперь равенство (1) можно переписать так:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{или} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'. \qquad (2)$$

Таким образом, производную $f'(x)$ функции $f(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала $\mathrm{d}y$ функции к дифференциалу $\mathrm{d}x$ аргумента.

Зная производную функции, легко найти ее дифференциал, и обратно (см. формулы (2)). Поэтому действия отыскания производной и дифференциала данной функции носят общее название: дифференцирование.

Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал $\mathrm{d}y$ функции $y = f(x)$ представляет собой приращение ординаты касательной, проведенной в данной точке M графика функции. На рис. 102

$$\mathrm{d}x = \Delta x = MN;\ \Delta y = NQ;\ \mathrm{d}y = NP.$$

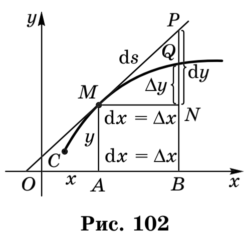


Рис. 102

Правила вычисления дифференциалов.

1. Дифференциал алгебраической суммы

$$\mathrm{d}\,(u + v - w) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}w.$$

2. Дифференциал произведения

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v.$$

В частности, если C — постоянная, то

$$\mathrm{d}\,(Cu) = C\mathrm{d}u; \quad \mathrm{d}\left(\frac{u}{C}\right) = \frac{\mathrm{d}u}{C} \ (C \neq 0).$$

3. Дифференциал частного (дроби)

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \ (v \neq 0).$$

В частности,

$$\mathrm{d}\left(\frac{C}{u}\right) = -\frac{C\mathrm{d}u}{u^2}.$$

Основные формулы вычисления дифференциалов.

Все указанные ниже формулы справедливы независимо от того, является ли u независимой переменной или функцией от другой переменной x (см. свойства дифференциала ниже).

1. $\mathrm{d}C = 0$ (C — постоянная).
2. $\mathrm{d}(u^m) = mu^{m-1}\,\mathrm{d}u$ (m — постоянная).

В частности,

$$\mathrm{d}\sqrt{u} = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}; \quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}.$$

3. $\mathrm{d}\,(a^u) = a^u \ln a\,\mathrm{d}u$ (a — постоянная, $a > 0$).
4. $\mathrm{d}\,(e^u) = e^u\,\mathrm{d}u$.
5. $\mathrm{d}\,(e^{au}) = ae^{au}\,\mathrm{d}u$ (a — постоянная).
6. $\mathrm{d}\,(u^v) = vu^{v-1}\,\mathrm{d}u + u^v \ln u\,\mathrm{d}v$ ($u > 0$).

В частности,

$$\mathrm{d}\,(u^u) = u^u(1 + \ln u)\,\mathrm{d}u.$$

7. $\mathrm{d}\,(\log_a u) = \dfrac{\mathrm{d}u}{u \ln a} = \dfrac{\log_a e}{u}\,\mathrm{d}u$ $(0 < a \neq 1)$.

В частности,

$$\mathrm{d}\,(\ln u) = \frac{\mathrm{d}u}{u}; \quad \mathrm{d}\,(\lg u) = \frac{\mathrm{d}u}{u \ln 10}.$$

8. $\mathrm{d} \sin u = \cos u\, \mathrm{d}u$.
9. $\mathrm{d} \cos u = -\sin u\, \mathrm{d}u$.
10. $\mathrm{d}\, \mathrm{tg}\, u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$.
11. $\mathrm{d}\, \mathrm{ctg}\, u = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u}$.
12. $\mathrm{d} \sec u = \mathrm{tg}\, u \sec u\, \mathrm{d}u$.
13. $\mathrm{d}\, \mathrm{cosec}\, u = -\mathrm{ctg}\, u\, \mathrm{cosec}\, u\, \mathrm{d}u$.
14. $\mathrm{d} \arcsin u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.
15. $\mathrm{d} \arccos u = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $\mathrm{d}\, \mathrm{arctg}\, u = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
17. $\mathrm{d}\, \mathrm{arcctg}\, u = -\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
18. $\mathrm{d}\, \mathrm{arcsec}\, u = \dfrac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-1}}$.
19. $\mathrm{d}\, \mathrm{arccosec}\, u = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-1}}$.

Свойства дифференциала.

1. *Инвариантность формы*. Дифференциал $f'(u)\mathrm{d}u$ функции $y = f(u)$ сохраняет одно и то же выражение независимо от того, является ли ее аргумент u независимой переменной или функцией от другой независимой переменной.

2. *Порядок малости*. Если $\mathrm{d}x$ — бесконечно малая, то $\mathrm{d}y$ и Δy — равносильные бесконечно малые, и разность $\Delta y - \mathrm{d}y$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ и Δy.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Пользуясь определением дифференциала функции, можно для малых Δx с небольшой погрешностью заменить выражение для приращения функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

выражением $f'(x_0)\Delta x$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3)$$

Приближенное равенство (3) и используется для вычисления значений функции.

С помощью (3) можно легко получить ряд приближенных формул (см. таблицу в п. 30.5), которыми часто пользуются на практике (ради сокращения записи в таблице введено обозначение: $\Delta x = h$).

Дифференциал дуги. Обозначив длину дуги CM через s (см. рис. 102), мы получим следующее выражение для дифференциала дуги:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \text{ или } \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}\,.$$

Геометрический смысл дифференциала дуги.

Дифференциал дуги $\mathrm{d}s$ равен отрезку касательной MP (см. рис. 102) от точки касания до точки пересечения касательной с перпендикуляром, восставленным к оси Ox в точке с абсциссой $x + \Delta x$.

Дифференциал второго порядка.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ *или вторым дифференциалом* называется дифференциал от дифференциала функции. Обозначения: d^2y, $\mathrm{d}^2f(x)$. Итак,

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

Аналогично определяются дифференциалы любого порядка. Дифференциал n-го порядка обозначается $\mathrm{d}^n y$. Если дана функция $y = f(x)$, где x — *независимая переменная*, то дифференциалы второго, третьего и высших порядков определяются по формулам:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2; \quad \mathrm{d}^3 y = f'''(x)\mathrm{d}x^3, \quad \ldots, \quad \mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

Если x не является независимой переменной, то эти формулы, вообще говоря, не верны.

27. Основы интегрального исчисления

Неопределенный интеграл. *Первообразной функцией* от данной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$ (или, что то же самое, дифференциал которой равен $f(x)\,\mathrm{d}x$):

$$F'(x) = f(x) \text{ или } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Если функция имеет первообразую, то она имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

График первообразной $F(x)$ от функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $y = f(x)$. Если $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... — первообразные данной функции $f(x)$, то их графики представляют собой одну и ту же линию, смещенную вверх или вниз в направлении оси Oy.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение $F(x) + C$, т.е. совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$.

Обозначение:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Здесь функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*; выражение $f(x)\,\mathrm{d}x$ — *подынтегральным выражением*; $F(x)$ — одна (любая) из первообразных функции $f(x)$; C — произвольная постоянная.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой *совокупность* (или, как говорят, *семейство*) *всех интегральных кривых*, получаемых при непрерывном параллельном движении одной из них по направлению оси Oy от $-\infty$ до $+\infty$.

Действие отыскания первообразных называется *интегрированием*. Интегрирование есть действие, *обратное* дифференцированию.

Свойства первообразной.

1. Производная от первообразной равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал первообразной равен подынтегральному выражению:

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Первообразная от дифференциала функции $F(x)$ равна сумме функции $F(x)$ и произвольной постоянной C:

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C,$$

или, что то же самое,

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

4. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$, где u — любая дифференцируемая функция от x.

Основные свойства, формулы и способы интегрирования.

Основные правила интегрирования.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Интеграл алгебраической суммы* равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\, dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x)\, dx - \int \psi(x)\, dx.$$

3. *Интеграл дроби*, в которой числитель есть производная знаменателя, равен натуральному логарифму модуля знаменателя:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Основные формулы интегрирования (таблица простейших интегралов).

1. $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$

3. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0).$

4. $\int e^x\, dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln |\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln |\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1.$$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C = -\arccos\frac{x}{|a|} + C_1.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

Простейшие способы интегрирования.

1. *Непосредственное интегрирование*. С помощью основных правил интегрирования и тождественных преобразований подынтегральной функции данный интеграл приводят к одному или нескольким табличным.

Пример 1.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

2. *Интегрирование подстановкой* (*способ замены переменной*). Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t^{*}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

Полагаем $2x - 1 = z$. Дифференцируя это соотношение, находим $2\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$, откуда $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z/2$. Итак, имеем

$$\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2} = \frac{1}{2}\int z^{1/2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{z^3} + C =$$

$$= \frac{1}{3}z\sqrt{z} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Полагаем $x = \sin t$ (тригонометрическая подстановка; она возможна, так как $|x| \leqslant 1$), тогда $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Подставим найденные соотношения в данный интеграл:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t.$$

Для вычисления второго интеграла вводим еще подстановку: $2t = z$, тогда $2\mathrm{d}t = \mathrm{d}z$ и второй интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos z\,\frac{\mathrm{d}z}{2} = \frac{1}{4}\int \cos z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Итак,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Для того чтобы возвратиться к старой переменной x, надо t и $\sin 2t$ выразить через x. Имеем

$$t = \arcsin x,$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Окончательно получим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

---

* Здесь предполагается, что $f(x)$ — непрерывная функция, а $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

3. *Интегрирование по частям.* Общая формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

где u и v — некоторые функции от x.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Полагая $x = u$; $\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, находим $\mathrm{d}u$ и v:

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\ v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

Теперь, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

Возьмем этот интеграл по частям, полагая

$$u = x;\quad \mathrm{d}v = \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \\ v = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}, \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

4. *Интегралы вида*

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\ (a \neq 0).$$

Интеграл

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

является табличным, так как в числителе стоит производная знаменателя: $(2ax + b)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\,(ax^2 + bx + c)$, и

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

Числитель $Mx + N$ всегда можно представить в виде

$$Mx + N = k(2ax + b) + l.$$

Тогда интеграл распадается на два:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = k\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + l\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c},$$

первый из которых мы только что вычислили.

При вычислении интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

рассматривают три различных случая, в зависимости от знака дискриминанта квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Случай 1-й: $b^2 - 4ac < 0$. Квадратный трехчлен может быть преобразован к виду $ay^2 + d$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right) = ay^2 + d,$$

где $y = x + \frac{b}{2a}$, $d = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}$.

Этот прием преобразования квадратного трехчлена называется *дополнением до полного квадрата*.

Затем интеграл сводится к табличному:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\mathrm{d}y}{ay^2+d} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\frac{d}{a}}$$

(интеграл 13, если $\frac{d}{a} > 0$, и интеграл 14, если $\frac{d}{a} < 0$).

Случай 2-й: $b^2 - 4ac = 0$. Квадратный трехчлен приводится к виду ay^2, так как в этом случае $d = 0$, а интеграл становится табличным:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\mathrm{d}y}{ay^2} = -\frac{1}{ay} + C = -\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)} + C =$$

$$= \frac{2}{2ax+b} + C.$$

Случай 3-й: $b^2 - 4ac > 0$. Квадратный трехчлен разлагается на множители:

$$a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — действительные корни квадратного трехчлена.

Подынтегральная функция преобразуется в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_1)} + \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).$$

Интеграл распадается на разность двух интегралов:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{x-x_1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-x_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|.$$

5. *Интеграл от алгебраической дроби*. Используя разложение алгебраической дроби на простейшие (см. в п. 4.3 случай 1), можно преобразовать интеграл от алгебраической дроби $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ в сумму интегралов от простейших дробей.

Пример 6 (см. § 4.3, пример 9). Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}\,\mathrm{d}x.$$

Так как

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)},$$

то

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{3}[2\ln|x+1| - \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + \ln|x-2|] + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right| + C.$$

Пример 7 (см. п. 4.3, пример 10). Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Разлагая подынтегральную фунцию на простейшие, получим

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Интегрируя, найдем

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+2)^2(x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C.$$

Пример 8 (см. п. 4.3, пример 11). Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Дробь разлагается на сумму простейших:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{3}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$\left(\text{Интеграл от } \dfrac{2(x-1)}{3(x^2+2)} \text{ разбит на два.}\right)$

Пример 9 (см. п. 4.3, пример 12). Вычислить интеграл

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx.$$

Используя разложение дроби на простейшие:

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2},$$

получим

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{(x-3)\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

Первые два интеграла берутся легко:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|; \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Вычислим третий интеграл, разбив его на три:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} -$$

$$-3\int \frac{dx}{1+x^2} + 3\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{3x+1}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - C.$$

Последний интеграл берется по частям. Складывая все интегралы, получим

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{x(1+x^2)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Таблица неопределенных интегралов.

Интегралы от рациональных функций*.

1. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1).$

2. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C = \dfrac{1}{a}\ln|C_1(ax+b)|.$

3. $\int \dfrac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \dfrac{b}{a^2(ax+b)} + \dfrac{1}{a^2}\ln|ax+b| + C \quad (a > 0).$

4. $\int \dfrac{dx}{a+bx^2} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) + C \quad (ab > 0).$

---

* В таблице предполагается, что параметры удовлетворяют необходимым ограничениям для существования соответствующих математических выражений. Некоторые из таких ограничений указаны в скобках.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left|\frac{\sqrt{ab} + bx}{\sqrt{ab} - bx}\right| + C \quad (ab > 0).$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \ln\left|\frac{x + b}{x + a}\right| + C \quad (a \neq b).$

7. $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2 - 4ac} \ln\left|\dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C_1 & (\text{если } 4ac - b^2 < 0); \\ -\dfrac{2}{2ax + b} + C_2 & (\text{если } 4ac - b^2 = 0); \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ax - b^2}} + C_3 & \end{cases}$$

8. $$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{M}{2a} \ln\left|ax^2 + bx + c\right| + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. № 7}).$$

9. $$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n - 1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2(2n - 3)a}{(n - 1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$$

10. $$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx = -\frac{M}{2(n - 1)a(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2aN - bM}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1, \text{ см. № 9}).$$

Замечание. К последним трем интегралам следует применять одну и ту же формулу до тех пор, пока не придем к интегралу 7. Такая формула носит название *рекуррентной.*

Интегралы от иррациональных функций.

11. $\displaystyle\int \sqrt{ax + b}\, dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax + b)^3} + C.$

12. $\displaystyle\int (ax + b)^{\frac{m}{n}}\, dx = \frac{n}{(m + n)a} (ax + b)^{\frac{m + n}{n}} + C.$

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C.$

14. $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3a^2}(3Na - 2Mb + Max)\sqrt{ax+b} + C.$

15. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C\ (a<0); \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bc+c}\right| + C \\ \qquad (a>0). \end{cases}$$

16. $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + $$
$$+ \frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ (см. № 15).}$$

17. $$\int \sqrt{ax^2+b+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + $$
$$+ \frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ (см. № 15).}$$

18. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

19. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C.$

20. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C.$

21. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

22. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$

23. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C.$

24. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C.$

25. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C.$

26. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{|a|} + C.$

27. $\int \sqrt{\frac{a + x}{b + x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{(a + x)(b + x)} +$

$+ (a - b)\ln\left|\sqrt{a + x} + \sqrt{b + x}\right| + C.$

28. $\int \sqrt{\frac{a + x}{b - x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{(a + x)(b - x)} - (a + b)\arcsin\sqrt{\frac{b - x}{a + b}} + C.$

29. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x + C.$

30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x - a}{b - a}} + C.$

Интегралы от тригонометрических функций (m и n — целые положительные числа).

31. $\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

32. $\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C.$

33. $\int \sin^n ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1}ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}ax\,\mathrm{d}x.$

34. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{ax}{2}\right| + C.$

35. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\mathrm{ctg}\,ax + C.$

36. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1}ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}ax}$ $(n > 1).$

37. $\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

38. $\int \cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C.$

39. $\int \cos^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}ax\,\mathrm{d}x.$

40. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos ax} = \frac{1}{a}\left|\ln\mathrm{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

41. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C.$

42. $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-1} ax} \quad (n > 1).$

43. $\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C.$

44. $\int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C.$

45. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax} =$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C & (b^2 > c^2); \\ -\frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}\right| + C_1 & (b^2 < c^2). \end{cases}$$

46. $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}\frac{ax}{2} + C.$

47. $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + C.$

48. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right] + C & (b^2 > c^2); \\ \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{b + c\cos ax}\right| + C_1 & (b^2 < c^2). \end{cases}$$

49. $\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$
$(m \neq n$; при $m = n$ см. № 32).

50. $\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$
$(m \neq n$; при $m = n$ см. № 38).

51. $\int \sin mx \cos nx \, dx =$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C_1 & (m \neq n); \\ \dfrac{1}{2m}\sin^2 mx + C_2 & (m = n). \end{cases}$$

52. $\int \operatorname{tg} ax \, dx = -\dfrac{1}{a}\ln|\cos ax| + C.$

53. $\int \operatorname{tg}^2 ax \, dx = \dfrac{\operatorname{tg} ax}{a} - x + C.$

54. $\int \operatorname{tg}^n ax \, dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax \, dx \ (n > 1).$

55. $\int \operatorname{ctg} ax \, dx = \dfrac{1}{a}\ln|\sin ax| + C.$

56. $\int \operatorname{ctg}^2 ax \, dx = -\dfrac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x + C.$

57. $\int \operatorname{ctg}^n ax \, dx = -\dfrac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax \, dx + C$ $(n > 1).$

Интегралы от некоторых трансцендентных функций.

58. $\int x \sin ax \, dx = -\dfrac{1}{a} x \cos ax + \dfrac{1}{a^2}\sin ax + C.$

59. $\int x \cos ax \, dx = \dfrac{1}{a} x \sin ax + \dfrac{1}{a^2}\cos ax + C.$

60. $\int x^n \sin ax \, dx = -\dfrac{x^n}{a}\cos ax + \dfrac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax \, dx.$

61. $\int x^n \cos ax \, dx = \dfrac{x^n}{a}\sin ax - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax \, dx.$

62. $\int \sin \ln|x| \, dx = \dfrac{x}{2}(\sin \ln|x| - \cos \ln|x|) + C.$

63. $\int \cos \ln|x| \, dx = \dfrac{x}{2}(\sin \ln|x| + \cos \ln|x|) + C.$

64. $\int \arcsin\dfrac{x}{a} \, dx = x \arcsin\dfrac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

65. $\int \arccos\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

66. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C.$

67. $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C.$

68. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} +$

$$+ \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (a > 0).$$

69. $\int x\arccos\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} -$

$$- \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (a > 0).$$

70. $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2 + a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C.$

71. $\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2 + a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C.$

72. $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

73. $\int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x.$

74. $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C \quad (n \neq -1).$

75. $\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

76. $\int \frac{\ln^n x\,\mathrm{d}x}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + C.$

77. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

78. $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$

79. $\int x e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C.$

80. $\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,\mathrm{d}x.$

81. $\int e^{ax} \sin(\alpha x + \beta)\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + \alpha^2}[a \sin(\alpha x + \beta) -$
$- \alpha \cos(\alpha x + \beta)] + C.$

82. $\int e^{ax} \cos(\alpha + \beta)\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + \alpha^2}[a \cos(\alpha\, x + \beta) +$
$+ \alpha \sin(\alpha x + \beta)] + C.$

Определенный интеграл. Пусть дана ограниченная функция $y = f(x)$, определенная на замкнутом интервале $[a, b]$ $(a < b)$. Разобьем интервал $[a, b]$ на n частей (не обязательно равных) точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (рис. 103). На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем произвольную точку ξ_i. Обозначив теперь длины отрезков

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots,$$
$$\ldots, x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$$

составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую *интегральной суммой*, где $f(\xi_i)$ — значение данной функции в точке ξ_i.

Предел интегральной суммы (если он существует и не зависит от способа разбиения и от выбора точек ξ_i) при условии, что наибольшая из величин Δx_i стремится к нулю (при выполнении этого условия число n точек деления будет стремиться к бесконечности), называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

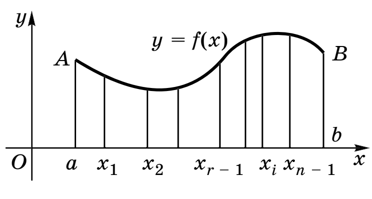


Рис. 103

Число a называется *нижним пределом* определенного интеграла, число b — его *верхним пределом*, a и b вместе — пределами интегрирования. Интервал $[a, b]$ называется *интервалом интегрирования*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — *подынтегральным выражением*, переменная x — *переменной интегрирования*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел в левой части равенства (1) существует и не зависит ни от выбора точек x_i деления отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_i.

Значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ зависит только от вида функции f и от пределов интегрирования a и b, но не зависит от обозначения переменной интегрирования, которая может быть обозначена любой буквой. Так, например,

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и внутри этого отрезка всюду неотрицательна, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ представляет собой в декартовой системе координат площадь *криволинейной трапеции* $aABb$ (см. рис. 103), ограниченной графиком подынтегральной функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. При этом $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, и $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$, если $f(x) \leqslant 0$.

Вычисление определенного интеграла.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т. е. если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, надо сначала найти первообразную $F(x)$ или неопределенный интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, а затем вычислить разность $F(b) - F(a)$ значений первообразной.

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$

2. Перестановка пределов интегрирования по определению приводит к перемене знака:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \;\; (a < b).$$

3. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$

4. Имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Значение c не обязательно лежит между a и b. Функция $f(x)$ должна быть непрерывной на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

5. Если C постоянная, то

$$\int_a^b Cf(x)\mathrm{d}x = C\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

6. $\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x.$

Способы интегрирования.

1. Интегрирование подстановкой (замена переменной в определенном интеграле). Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $a = \varphi(a)$, $b = \varphi(b)$.

Пример 10. Вычислить определенный интеграл $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

Полагаем $2x - 1 = z$. Дифференцируя это соотношение, находим $2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$, откуда $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z/2$. Находим теперь новые пределы интегрирования. Для этого из соотношения $2x - 1 = z$ определяем значения z_1 при $x_1 = 1$ и z_2 при $x_2 = 5$:

$$z_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1; \quad z_2 = 2 \cdot 5 - 1 = 9.$$

Итак, имеем

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^9 \frac{\sqrt{z}\,\mathrm{d}z}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,z^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{9^{3/2}}{3} - \frac{1^{3/2}}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}\,.$$

Пример 11. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Полагаем $x = \sin t$, тогда $\mathrm{d}x = \cos t\, \mathrm{d}t$. Находим новые пределы интеграла:

$$0 = \sin t_1,\ \text{откуда}\ t_1 = 0;\ 1 = \sin t_2,\ \text{откуда}\ t_2 = \pi/2.$$

Итак, имеем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \cos t\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2t\, \mathrm{d}t = \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

В отличие от неопределенного интеграла при вычислении определенного интеграла способом замены переменной нет надобности возвращаться к первоначальной переменной.

2. Интегрирование по частям. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

где u и v — функции от x.

Приложения определенного интеграла к геометрии и физике (здесь всюду рассматривается график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$).

Площадь криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной графиком знакопостоянной* ($f(x) \geqslant 0$) на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 103), вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b y\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

---

* Если на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ знакопеременна, то формулу (2) следует применять отдельно к частям отрезка, где $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, а затем сложить абсолютные величины полученных интегралов.

Площадь фигуры $ABCD$, заключенной на интервале $[a, b]$ между графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(f_1(x) \geqslant f_2(x))$ (рис. 104), вычисляется так:

$$S = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

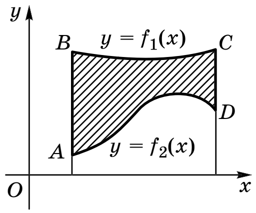


Рис. 104

Длина дуги AB плоской кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Площадь поверхности тела вращения. Площадь поверхности тела, образованного вращением графика функции $y = f(x)$ (здесь $f(x) \geqslant 0$ на всем отрезке $[a, b]$) вокруг оси Ox на отрезке $[a, b]$ (рис. 105), вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

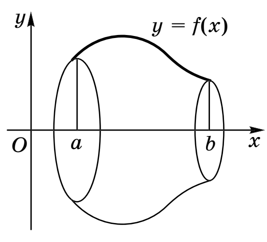


Рис. 105

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ГЮЛЬДЕНА. Если дуга плоской кривой длины L вращается около оси, не пересекающей эту дугу и лежащей с ней в одной плоскости, то площадь поверхности тела вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi d \cdot L,$$

где d — расстояние центра масс дуги от оси вращения.

Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 105), вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ГЮЛЬДЕНА. Если пластинка площадью S вращается около оси, не пересекающей ее и лежащей с ней в одной плоскости, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = 2\pi d \cdot S,$$

где d — расстояние центра масс пластинки от оси вращения.

Длина пути, пройденного материальной точкой, движущейся со скоростью $v = f(t)$, за время от t_1 до t_2 равна

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Работа силы. Если материальная точка перемещается вдоль оси Ox от точки $x = a$ до точки $x = b$ под действием переменной силы F, направленной вдоль оси Ox и являющейся функцией $f(x)$ расстояния x этой материальной точки от некоторой фиксированной точки O оси Ox (рис. 106), то работа силы F на участке $[a, b]$ равна

$$A = \int_a^b F\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

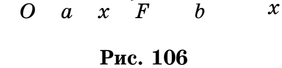


Рис. 106

Статические моменты, координаты центра масс, моменты инерции для дуги однородной кривой **(рис. 107)** ***и однородной пластинки*** **(рис. 108):**

Таблица VI.2

Название	Формулы для дуги (рис. 107)	Формулы для пластинки (рис. 108)
Статический момент относительно: оси Ox	$S_x = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$	$S_x = \int\limits_\alpha^\beta yx\,\mathrm{d}y$*
оси Oy	$S_y = \int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$	$S_y = \int\limits_a^b xy\,\mathrm{d}x$**
Координаты центра масс	$x_C = \dfrac{S_y}{L},\ y_C = \dfrac{S_x}{L}$ (L – длина дуги AB)	$x_C = \dfrac{S_y}{S},\ y_C = \dfrac{S_x}{S}$ (S – площадь пластинки)
Момент инерции относительно: оси Ox	$J_x = \int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$	$J_x = \int\limits_a^b y^2x\,\mathrm{d}y$*
оси Oy	$J_y = \int\limits_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$	$J_y = \int\limits_a^b x^2y\,\mathrm{d}x$**
начала координат	$J_0 = J_x + J_y$	$J_0 = J_x + J_y$

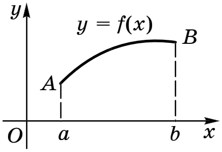


Рис. 107

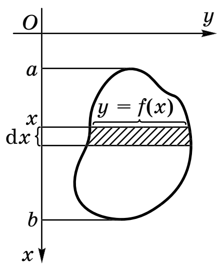


Рис. 108

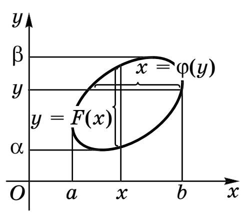


Рис. 109

Примечания к табл. VI.2. * Здесь $x = \varphi(y)$ — длина сечения, параллельного оси Ox, проведенного на расстоянии y от нее (рис. 109).

** Здесь $y = F(x)$ — длина сечения, параллельного оси Oy, проведенного на расстоянии x от нее (см. рис. 109).

Давление жидкости на вертикальную пластинку. Давление жидкости плотностью ρ на погруженную в нее вертикальную пластинку вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b xy\,\mathrm{d}x,$$

где y — длина горизонтального сечения пластинки, отстоящего на расстоянии x от поверхности жидкости $[y = f(x)]$; a — глубина самой верхней точки пластинки; b — глубина самой нижней ее точки (см. рис. 108).

Простейшие дифференциальные уравнения. Обыкновенным *дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, связывающее между собой независимую переменную x, функцию y и производные (или дифференциалы) различных порядков от функции y.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной (или дифференциала). Например, уравнение

$$y'' + y = 0 \qquad (1)$$

является дифференциальным уравнением *второго порядка*, а уравнение

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (2)$$

— дифференциальным уравнением *первого порядка*.

Всякая функция, которая, будучи подставленной в дифференциальное уравнение вместе с ее производными вместо искомой функции и ее производных, обращает это уравнение в тождество (удовлетворяет уравнению), называется *решением* или *интегралом дифференциального уравнения*.

Чтобы определить конкретное решение дифференциального уравнения, обычно задают начальные условия, причем их число равно порядку уравнения. Тогда соответствующая задача, например для уравнения (1), ставится так: найти решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0\,. \tag{3}$$

Решение такой задачи зависит от двух постоянных: y_0 и $y_0{}'$. В связи с этим *общим решением* уравнения (1) называется функция $y(x,\ C_1,\ C_2)$, зависящая от произвольных постоянных C_1 и C_2, обращающая (1) в тождество и удовлетворяющая (3) при соответствующим образом подобранных значениях C_1 и C_2. Например, общим решением для уравнения (1) будет

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \tag{4}$$

поскольку

$$y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x,$$

и, следовательно, $y''+ y = 0$.

Если должно быть $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$, то это значит, что

$$C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y_0;$$

$$C_1 \cos x_0 - C_2 \sin x_0 = y'_0,$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1 &= y_0 \sin x_0 + y'_0 \cos x_0; \\ C_2 &= y_0 \cos x_0 - y'_0 \sin x_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив C_1 и C_2 из (5) в (4), получим решение, удовлетворяющее уравнению (1) и начальным условиям (3).

Так как отыскание такого решения возможно при любых заданных y_0 и y'_0 , то это означает, что функция (4) есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется его решение, получающееся из общего решения при каких-нибудь определенных значениях произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение может, кроме частных решений, иметь и решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольных постоянных. Такие решения называются *особыми*.

Геометрический смысл.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка изображается семейством интегральных кривых,зависящих от одного параметра (см. геометрический смысл неопределенного интеграла).

Простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся к виду

$$f_1(x)\, f_2(y)\, \mathrm{d}x + \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, \mathrm{d}y = 0,$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*. Решается такое уравнение методом *разделения переменных*, т. е. преобразованием его к виду

$$\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,\mathrm{d}y + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,\mathrm{d}y + \int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,\mathrm{d}x = C.$$

Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к виду

$$y = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

называются *однородными*. Подстановка $y = ux$, $y' = u'x + u$, где u — новая неизвестная функция от x, сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения. Уравнения, приводящиеся к виду

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

называются *линейными*. Подстановка $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, где u и v — две новые неизвестные функции от x, сводит решение линейного уравнения к решению двух уравнений с разделяющимися переменными. Общее решение линейного уравнения находится по формуле

$$y = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right].$$

28. Ряды

Числовые ряды. Приведем основные понятия и определения.

Сходимость ряда.

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

в котором a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... — элементы числовой последовательности (называемые членами ряда), для которых задан закон, позволяющий определить каждый из a_n по его номеру n.

Выражение для n-го члена ряда (т.е. для a_n) при произвольном n называется *общим членом* ряда.

Суммы

$$S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ \ldots;$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

называются *частичными суммами ряда*; сумма S_n (т.е. сумма n первых членов ряда) называется n-й *частичной суммой ряда*.

Ряд называется *сходящимся*, если существует предел его n-й частичной суммы при n, стремящемся к бесконечности, т. е. если

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S. \tag{2}$$

Число S называют *суммой ряда*:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Такую запись часто заменяют следующей сокращенной записью:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Разность R_n между суммой ряда S и его n-й частичной суммой S_n называется *остатком* сходящегося ряда:

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} + \ldots .$$

Если же предел (2) не существует, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Примером бесконечного ряда может служить сумма членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots .$$

Этот ряд, как известно, сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q} =$$

$$= \frac{a}{1 - q} - a \lim_{n \to \infty} \frac{q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a}{1 - q},$$

так как $\lim\limits_{n \to \infty} q^{n+1} = 0$ при $|q| < 1$.

Необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд сходится, то его общий член a_n при неограниченном возрастании его номера n стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0.$$

Этот признак является *необходимым*. Обратное утверждение неверно, т. е. если для некоторого ряда $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, то отсюда не вытекает, что данный ряд сходится. Так, n-й член ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Между тем, этот ряд расходится, так как

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

и, следовательно, последовательность частичных сумм при $n \to \infty$ предела не имеет.

Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.

1. *Признак сравнения рядов*. Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots ;$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots .$$

Если каждый член второго ряда не больше соответствующего члена первого ряда, т. е.

$$b_n \leqslant a_n,$$

и известно, что первый ряд сходится, то второй ряд тоже сходится.

Если же

$$b_n \geqslant a_n$$

и известно, что первый ряд расходится, то второй ряд тоже расходится.

2. *Признак Даламбера* (*достаточный признак сходимости*). Если при $n \to \infty$ существует предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, равный ρ:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ ряд расходится, при $\rho = 1$ признак определенного ответа не дает: ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Знакопеременные ряды содержат как положительные, так и отрицательные члены. Если же каждый следующий член имеет знак, противоположный предыдущему, то ряд называется *знакочередующимся*.

Например, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$.

3. *Признак сходимости Лейбница*. Если модули членов знакочередующегося ряда убывают с возрастанием их номера n и общий член a_n ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится, причем остаток R_n ряда не превосходит по модулю первого из отбрасываемых членов.

4. *Абсолютная сходимость ряда*. Если ряд, составленный из модулей членов данного знакопеременного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Знакопеременный ряд, модули членов которого образуют сходящийся ряд, называется *абсолютно сходящимся*.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то данный ряд называется *условно сходящимся*.

Конечные суммы. Суммы бесконечных числовых рядов.

Конечные суммы

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

4) $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

5) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$,

6) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

7) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Ряды

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$.

2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{2}{3}$.

3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots = \ln 2$.

4) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}$.

5) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

6) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e$.

7) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots = \frac{1}{e}$.

8) $\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \ldots + \frac{n}{(2n+1)!} + \ldots = \frac{1}{2e}$.

9) $1 + 2^3 + \frac{3^3}{2!} + \ldots + \frac{n^3}{(n-1)!} + \ldots = 15\,e$.

Функциональные ряды. Ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots ,$$

члены которого являются функциями от некоторой переменной x, называется *функциональным рядом*.

При каком-нибудь определенном числовом значении x_0 аргумента x функциональный ряд обращается в числовой:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots .$$

При одних значениях аргумента x могут получиться сходящиеся числовые ряды, а при других — расходящиеся. Совокупность всех значений аргумента x, при которых данный функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости.

Обозначение:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \lim_{n \to \infty} S_n(x),$$

где

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x).$$

В этом случае говорят, что данный ряд сходится к функции $f(x)$.

Степенны́е ряды.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots , \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots , a_n \dots$ — постоянные коэффициенты.

Областью сходимости степенного ряда (1) всегда является некоторый интервал $(-R, R)$ с центром в точке $x = 0$ (рис. 110), называемый *интервалом сходимости* степенного ряда. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Во всех внутренних точках своего интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно. На концах же этого интервала ряд может либо сходиться, либо расходиться. Если радиус сходимости степенного ряда R равен нулю, то этот ряд сходится только в одной точке $x = 0$; если радиус сходимости бесконечен, то ряд сходится при всех значениях аргумента x $(-\infty < x < +\infty)$.

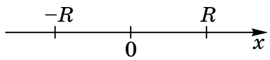


Рис. 110

Функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую производные всех порядков в промежутке $(-R,\ R)$, можно представить как сумму степенного ряда вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (2)$$

называемого *рядом Маклорена* для данной функции $f(x)$. В таком случае говорят, что функция $y = f(x)$ разложена в ряд Маклорена. В формуле (2)

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0),\ \ldots,\ f^{(n)}(0),\ \ldots$$

представляют собой значения функции и ее производных при $x = 0$.

Таблица разложения некоторых функций в ряд Маклорена:

Функция и ее ряд Маклорена	Область сходимости ряда
$(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots,$ $(a - x)^m = a^m - ma^{m-1}x + \ldots + (-1)^n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots,$	$\left.\begin{array}{l} -a \leqslant x \leqslant a \\ \text{при } m > 0 \\ -a < x < a \\ \text{при } m < 0 \end{array}\right\}$ $a > 0$
$a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \ldots + \frac{x^n\ln^n a}{n!} + \ldots,$	$a > 0$ $-\infty < x < +\infty$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\mathrm{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots,$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Продолжение табл.

Функция и ее ряд Маклорена	Область сходимости ряда
$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots\right],$	$\left[\begin{array}{l}-\pi < x < 0 \\ 0 < x < \pi\end{array}\right.$
$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} + \ldots,$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arctg} x\ {}^* = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots,$	$-1 < x < 1$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \ldots,$	$-1 < x \leqslant 1$
$\ln(1-n) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right]$	$-1 \leqslant x < 1$
$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \pm \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\int\limits_0^x e^{-x^2} dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \pm \ldots$	$-\infty < x < +\infty$

* Формулы для разложения в ряд Маклорена функций arccos x и arcctg x легко получить, если воспользоваться соотношениями

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Ряды Фурье. *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... — постоянные величины, называемые *коэффициентами тригонометрического ряда*. Тригонометрический ряд (1) записывают короче так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \qquad (1')$$

Если тригонометрический ряд (1) сходится для всех значений x к некоторой функции $f(x)$, то коэффициенты этого ряда связаны с функцией $f(x)$ следующими ***соотношениями Эйлера – Фурье***:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Большое практическое значение имеет следующая **задача:** по заданной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π найти всюду сходящийся тригонометрический ряд (1), имеющий сумму $f(x)$.

Оказывается, что для всех практически важных непрерывных функций такая задача имеет решение, причем коэффициенты искомого ряда (1) находятся по формулам (2) Эйлера – Фурье.

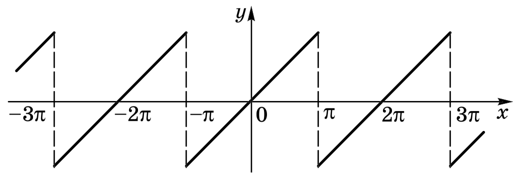
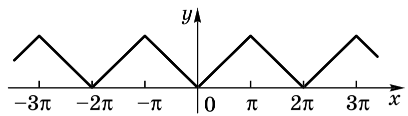
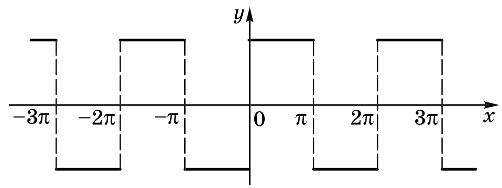
Тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого определяются по формулам (2), где $f(x)$ — заданная функция, называется *рядом Фурье для функции* $f(x)$.

Задача, о которой шла речь, называется иначе *разложением функции* $f(x)$ *в ряд Фурье* (см. табл. VI.3).

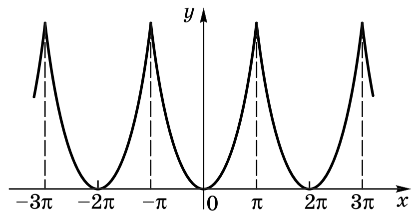
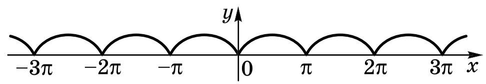
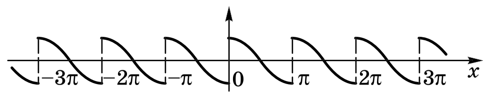
В ряд Фурье можно разложить и непериодическую функцию $f(x)$. Такой ряд будет сходиться к заданной функции $f(x)$ только на интервале $(-\pi, \pi)$. Вне этого интервала и на его концах сумма ряда будет отличаться от соответствующего значения самой функции $f(x)$.

Таблица VI.3

Разложение некоторых функций в ряд Фурье

Функция	Разложение в ряд Фурье	Интервал сходимости ряда к данной функции	График суммы ряда Фурье
$y = x$	$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$	$-\pi < x < \pi$	
$y = x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^5} + \ldots\right)$	$0 < x < \pi$	
$y = a$	$\frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$	$0 < x < \pi$	

Продолжение табл. VI.3

Функция	Разложение в ряд Фурье	Интервал сходимости ряда к данной функции	График суммы ряда Фурье
$y = x^2$	$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$	$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = \sin x$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = \cos x$	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2\sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3\sin 6x}{5 \cdot 7} + \dots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	

Достаточное условие разложения функции в ряд Фурье.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем конечное число экстремумов, то ряд Фурье для этой функции сходится всюду, причем для любого значения x внутри отрезка $[-\pi, \pi]$ его сумма равна $f(x)$, на концах же этого отрезка его сумма равна

$$\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)],$$

т. е. среднему арифметическому значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$.

Ряд Фурье для четной и нечетной функций.

Для четной функции $f(x)$ коэффициенты Эйлера – Фурье равны

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \, , \; b_n = 0;$$

для нечетной же функции $f(x)$

$$a_n = 0; \; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx \, .$$

Если функция $f(x)$ задана лишь на интервале $(0, \pi)$, то ее можно разложить в ряд Фурье либо только по косинусам, если доопределить эту функцию на интервале $(-\pi, 0)$ как четную, либо только по синусам, если доопределить ее на интервале $(-\pi, 0)$ как нечетную.

Часть 3

ОБРАБОТКА ДАННЫХ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ТАБЛИЦЫ

VII. Обработка данных

29. Обработка и анализ статистических данных (элементы)

Оформление данных в виде таблиц.

Пример. В течение нескольких лет собиралась информация о потреблении некоторого продукта в четырех крупных районах страны с условными названиями: Север, Восток, Запад, Юг. Данные поступали раз в три месяца и записывались в тетрадь:

Потребление продукта за апрель — июль N-го года

Север — 47 тыс. т. Восток — 78 тыс. т.

Запад — 310 тыс. т. Юг — 38 тыс. т.

Спустя некоторое время возникла потребность обобщить накопленную информацию. Для этого ее свели в таблицу. Каждому району отвели свою строку, зафиксировали начало наблюдений и месяцы, по которым имеются данные, пронумеровали подряд. Данные, относящиеся к одному отрезку времени, расположили в столбик и получили следующую таблицу:

Таблица VII.1

Район	1—3	4—6	7—9	10—12	13—15	16—18	19—21	22—24
Север	47	45	54	50	49	47	57	52
Восток	84	85	90	89	80	78	84	82
Запад	345	305	410	390	337	310	425	375
Юг	24	36	54	33	25	38	61	32

Несмотря на то что данные уже записаны в табличной форме, ими еще не очень удобно пользоваться. Прежде всего бросается в глаза различный порядок цифр для сведенных в таблицу районов. Если в дальнейшем эти районы придется сравнивать, то полезно учесть, что они различны по площади, населенности и т. д. Поскольку речь идет о потреблении, нужно принять во внимание численность населения.

Предположим, что ориентировочные данные о населении общеизвестны: на Севере проживает 5 млн. человек, на Востоке — 9, на Западе — 35, а на Юге — 3 млн. человек. Поделив в уме соответствующие элементы таблицы на численность населения, мы получим достаточно близкие (за небольшим исключением) друг к другу числа: около 10. Следовательно, переход к данным, характеризующим потребление рассматриваемого нами продукта в расчете на душу населения, оправдан. Воспользуемся более точными данными о населении (в миллионах человек):

Год	Район				Всего
	Север	Восток	Запад	Юг	
($N-1$)-й	4,9	9,1	35,5	2,9	52,4
N-й	5,0	8,7	35,7	3,1	52,5

Справа мы добавили еще один столбец, в котором указано общее население всех четырех районов. Теперь табл. VII.1 можно преобразовать в табл. VII.2.

Таблица VII.2

Потребление продукта (в килограммах) в расчете на душу населения за ($N-1$)-й и N-й годы

Район	($N-1$)-й год				N-й год			
	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.
Север	9,59	9,18	11,02	10,20	9,80	9,40	11,40	10,40
Восток	9,23	9,34	9,89	9,78	9,20	8,97	9,66	9,43
Запад	9,72	8,59	11,55	10,99	9,44	8,68	11,90	10,50
Юг	8,28	12,41	18,62	11,38	8,06	12,26	19,68	10,32
В среднем	9,54	8,99	11,60	10,72	9,35	9,01	11,94	10,30

Новая таблица уже значительно усовершенствована. Во-первых, у нее появился заголовок, в котором указаны: содержание таблицы, период, к которому относятся данные, единицы измерения. Во-вторых, более наглядными стали заголовки столбцов — теперь ясно видно, что мы имеем дело с квартальными данными и к каким годам эти данные относятся. В-третьих, появилась строка, подытоживающая данные за каждый квартал, но вместо суммы в ней указана средняя для всех четырех районов величина потребления за квартал. Чтобы рассчитать ее, пришлось сложить данные из табл. VII.1 и разделить полученный результат на соответствующее рассматриваемому году население: получена *средневзвешенная величина* стоящих в столбце значений, и она не совпадает с их обычной арифметической средней.

Анализ табличных данных. Приступая к анализу табличных данных, нужно сначала обратить внимание на то, достаточно ли они обозримы, т. е. не препятствует ли восприятию содержащейся в данных информации избыточное число значащих цифр. В табл. VII.3 данные табл. VII.2 округлены до десятых, появился столбец данных за средний квартал года. (Для простоты приводятся данные т о л ь к о за N-й год.)

Таблица VII.3

Район	N-й год				В среднем
	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.	
Север	9,8	9,4	11,4	10,4	10,2
Восток	9,2	9,0	9,7	9,4	9,3
Запад	9,4	8,7	11,9	10,5	10,1
Юг	8,1	12,3	19,7	10,3	12,6
В среднем	9,4	9,0	11,9	10,3	10,2

Хотя данные о потреблении можно сравнивать как по периодам, так и по районам, все-таки более тесные сопоставления, по-видимому, должны относиться к одному району. Поэтому строки и столбцы табл. VII.3 следует поменять местами. При этом районы можно расположить по возрастанию потребления продукта в расчете на душу населения.

Чтобы получить более наглядное представление об изменении данных по периодам и районам, удобно составить таблицу отклонений данных от общего для них среднего значения, т. е. вычесть из каждого значения табл. VII.4 величину 10,2. Получим табл. VII.5.

Таблица VII.4

N-й год	Район				В среднем
	Восток	Запад	Север	Юг	
I кв.	9,2	9,4	9,8	8,1	9,4
II кв.	9,0	8,7	9,4	12,3	9,0
III кв.	9,7	11,9	11,4	19,7	11,9
IV кв.	9,4	10,5	10,4	10,3	10,3
В среднем	9,3	10,1	10,2	12,6	10,2

Таблица VII.5

Отклонения от средней

N-й год	Район			
	Восток	Запад	Север	Юг
I кв.	−1,0	−0,8	−0,4	−2,1
II кв.	−1,2	−1,5	−0,8	+2,1
III кв.	−0,5	+1,7	+1,2	+9,5
IV кв.	−0,8	+0,3	+0,2	+0,1
В среднем	−0,9	−0,1	0	+2,4

Таблица отклонений от средней позволяет обнаружить некоторые закономерности, свойственные имеющимся в нашем распоряжении данным. Заметим, что для всех районов, кроме Юга, самый низкий уровень потребления наблюдается во втором квартале, а самый высокий уже для всех без исключения районов — в третьем квартале. Если мы обратимся к данным за $(N - 1)$-й год, то увидим примерно такую же картину. Таким образом, наши данные обнаруживают сезонные колебания спроса.

В табл. VII.5 содержатся два числа, явно выпадающие из общей картины, — это значения для Юга во втором и третьем кварталах. Значение во втором квартале, как мы уже отмечали, не соответствует общему правилу, в соответствии с которым для этого квартала достигается минимум потребления, а значение для третьего квартала оказалось неправдоподобно большим. Как относиться к таким отклонениям?

Общих рекомендаций здесь быть не может, ибо все зависит от цели, с которой ведется анализ данных, и от той содержательной информации, которой мы располагаем. Так, если приведенные данные относятся, например, к потреблению сахара, то и сезонность и отклонения для Юга допускают вполне правдоподобное объяснение. В самом деле, в третьем квартале потребление сахара увеличивается в связи с заготовкой ягод и фруктов на зиму. Кроме того, уже во втором квартале на Юг отправляются отдыхающие, в результате чего фактическое население этого района значительно возрастает в сравнении с зимними месяцами, а в третьем квартале приток отдыхающих накладывается на период заготовок ягод и фруктов. Таким образом, ошибки в данных, скорее всего, нет. Однако это не означает, что обрабатывать данные и делать на их основе выводы можно, не обращая внимания на два отмеченных существенных отклонения. Если нас будут интересовать общие закономерности, связанные с потреблением рассматриваемого продукта, то отклонения из дальнейшего анализа лучше исключить. Если же речь пойдет о распределении продукта с целью удовлетворения спроса на него, то придется учитывать всю имеющуюся информацию целиком.

Таблица VII.6

Отклонения от средних по районам

N-й год	Район			
	Восток	Запад	Север	Юг
I кв.	−0,1	−0,7	−0,4	−4,5
II кв.	−0,3	−1,4	−0,8	−0,3
III кв.	+0,4	+1,8	+1,2	+7,1
IV кв.	+0,1	+0,4	+0,2	−2,3
В среднем	0	0	0	0

Чтобы обнаружить сезонные колебания и проанализировать их, удобно составить таблицу отклонений по районам от соответствующих каждому из них годовых средних (табл. VII.6).

Построим табл. VII.4а и VII.6а, аналогичные табл. VII.4 и VII.6, для (N − 1)-го года.

Таблица VII.4а

(N−1)-й год	Район				В среднем
	Восток	Запад	Север	Юг	
I кв.	9,2	9,7	9,6	8,3	9,5
II кв.	9,3	8,6	9,2	12,4	9,0
III кв.	9,9	11,6	11,2	18,6	11,6
IV кв.	9,8	11,0	10,2	11,4	10,7
В среднем	9,6	10,2	10,0	12,7	10,2

Таблица VII.6а

Отклонения от средних по районам

(N−1)-год	Район			
	Восток	Запад	Север	Юг
I кв.	−0,4	−0,5	−0,4	−4,4
II кв.	−0,3	−1,6	−0,8	−0,3
III кв.	+0,3	+1,4	+1,2	+5,9
IV кв.	+0,2	+0,8	+0,2	−1,3
В среднем	0	0	0	0

Сравнивая табл. VII.6 и VII.6а, мы убеждаемся в очень заметном сходстве сезонных колебаний, что подтверждает гипотезу о сезонных колебаниях спроса на интересующий нас продукт. Для трех районов: Восток, Запад, Север — можно утверждать, что среднее значение спроса в расчете на душу населения достаточно стабильно, причем в первом полугодии спрос несколько ниже среднего значения, а во втором полугодии он несколько выше. В первом из районов амплитуда сезонных колебаний невелика, а в двух других она значительно заметнее. Колебания спроса в районе Юг имеют несколько иной характер: в третьем квартале наблюдается значительное превышение среднего значения, а в остальные кварталы спрос ниже среднего, причем во втором квартале спрос почти равен среднему, а в третьем — значительно выше среднего. Спрос как бы поднимается по почти равным ступеням от нижнего положения к верхнему, а затем почти таким же образом опускается в свое нижнее положение. Такая картина с большой точностью повторялась оба года, за которые имеются наблюдения. Чтобы выявить роль, которую играют в нашем примере систематические колебания, сначала усредним отклонения (см. табл. VII.6 и VII.6а) от средних (табл. VII.7), а затем приведем отклонения от этих средних отклонений (табл. VII.8). Характер данных в табл. VII.8 свидетельствует, во-первых, о том, что таблица средних значений спроса за два года служит хорошим ориентиром (моделью) спроса на интересующий нас продукт в рассматриваемых районах (табл. VII.9), во-вторых, определенная стабильность отклонений в третьем и четвертом кварталах указывает на существование фактора, отличающего один год от другого, причем этот фактор не был принят нами во внимание (правда, влияние неучтенного фактора не очень велико).

Таблица VII.7

Усредненные отклонения за два года

Квартал	Район			
	Восток	Запад	Север	Юг
I кв.	−0,2	−0,6	−0,4	−4,4
II кв.	−0,3	−1,5	−0,8	−0,3
III кв.	+0,4	+1,6	+1,2	+6,5
IV кв.	+0,2	+0,6	+0,2	−1,8
В среднем	0	0	0	0

Таблица VII.8

Отклонения от средних отклонений (или отклонение от средних значений за два года)

Квартал	Район			
	Восток	Запад	Север	Юг
I кв.	−0,1	+0,1	0	+0,1
II кв.	0	−0,1	0	0
III кв.	0	−0,2	0	−0,6
IV кв.	+0,1	+0,2	0	+0,5
В среднем	0	0	0	0

Таблица VII.9

Модель потребления продукта

Квартал	Район				В среднем
	Восток	Запад	Север	Юг	
I кв.	9,4	9,6	9,7	8,2	9,4
II кв.	9,2	8,6	9,3	12,4	9,0
III кв.	9,8	11,8	11,3	19,1	11,7
IV кв.	9,6	10,8	10,3	10,8	10,5
В среднем	9,5	10,2	10,1	12,6	10,2

Теперь можно сделать вывод о плане поставок продукта в четыре рассмотренных района в течение года. Общий план поставок определяется среднедушевым потреблением 10,2, умноженным на общую численность населения. При наличии сравнительно небольшого запаса потребности первых трех районов могут быть удовлетворены, если ежеквартально поставлять в каждый из них количество продукта, равное четвертой части среднедушевого потребления за год в этом районе, взятого из табл. VII.9 и умноженного на численность населения соответствующего района. Та же политика для района Юг приведет к дефициту в третьем квартале. Однако численность населения в этом районе невелика и поэтому для него можно сохранить ту же политику, несколько увеличив страховой запас.

Временны́е ряды. Если характеристика некоторого объекта измеряется через равные промежутки времени, то полученные данные, расположенные в порядке их появления, образуют *временно́й ряд*.

В табл. VII.10 приведены примеры временных рядов — годовые данные о населении страны в миллионах человек, о производстве электроэнергии и гидроэлектроэнергии в миллионах тонн условного топлива (т у.т.) за 15 последовательных лет.

Квартальные данные, также образующие временной ряд для каждого из регионов, рассматривались на с. 331.

Таблица VII.10

Три временны́х ряда

Год	Население, млн. человек	Выработка электроэнергии, млн. т у.т.	Выработка гидроэлектроэнергии, млн. т у. т.
1	241,1	91,1	15,3
2	243,9	98,4	15,5
3	246,3	105,4	15,1
4	248,6	112,5	15,0
5	250,9	120,0	16,2
6	253,3	127,8	15,5
7	255,6	136,7	16,7
8	257,9	141,4	18,1
9	260,1	147,8	20,9
10	262,1	152,3	21,2
11	264,5	159,2	22,6
12	266,6	163,1	23,0
13	268,8	168,1	21,5
14	271,2	174,4	22,2
15	273,8	183,5	25,0

Таким образом, временно́й ряд — это последовательность. Величина промежутка времени между соседними членами ряда является его *шагом*.

Чтобы составить представление о поведении временно́го ряда, пользуются различными способами его представления и образуют производные от него временные ряды. В табл. VII.11 для ряда численности населения из табл. VII.10 приведены:

N_i $(i = 1, \ldots, 15)$ — численность населения в миллионах человек (столбец *2*);

$\Delta N_{i+1} = N_{i+1} - N_i$ $(i = 1, \ldots, 14)$ — абсолютный прирост численности населения за год (столбец *3*);

$\Delta^2 N_{i+1} = \Delta N_{i+1} - \Delta N_i$ $(i = 2, \ldots, 14)$ — изменение абсолютного прироста за год (столбец *4*);

Таблица VII.11

Временной ряд, способы его представления и производные ряды

Год	Населе-ние, млн. человек	При-рост	Измене-ние при-роста	Темп роста %	Темп прироста %	Индекс (год 1 = 100)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	241,8					100,00
2	243,9	2,1		100,91	0,91	100,91
3	246,3	2,4	+0,3	100,98	0,98	101,90
4	248,6	2,3	−0,1	100,93	0,93	102,85
5	250,9	2,3	0	100,93	0,92	103,80
6	253,3	2,4	+0,1	100,96	0,96	104,80
7	255,6	2,3	−0,1	100,91	0,91	105,75
8	257,9	2,3	0	100,90	1,90	106,70
9	260,1	2,2	−0,1	100,85	0,85	107,61
10	262,1	2,0	−0,2	100,77	0,77	108,40
11	264,5	2,4	+0,4	100,92	0,92	109,40
12	266,6	2,1	−0,3	100,79	0,79	110,30
13	268,8	2,2	+0,1	100,82	0,82	111,21
14	271,2	2,4	+0,2	100,89	0,89	112,20
15	273,8	2,6	+0,2	100,96	0,96	113,28

$100N_{i+1}/N_i$ $(i = 1, \ldots, 14)$ — относительный годовой рост населения, годовой *темп роста* в процентах (столбец *5*);

$100\left(\dfrac{N_{i+1}}{N_i} - 1\right)$ $(i = 1, \ldots, 14)$ — относительный годовой прирост населения, годовой *темп прироста* в процентах (столбец *6*);

$100N_i/N_1$ $(i = 1, \ldots, 15)$ — индекс роста населения; численность в году 1 принята за 100 (в заголовке таблицы пишут: год 1 = 100) (столбец *7*).

Значения в столбце *3* позволяют сделать вывод, что ежегодные приросты населения примерно одинаковы и колеблются около среднего значения прироста, равного 2,3 млн. человек. Таким образом, вместо того чтобы запоминать весь ряд, можно запомнить среднюю величину ежегодного прироста (2,3 млн. человек) и, например, значение ряда в году 1 (241,7 млн. человек). Любое значение ряда за другие годы периода можно теперь приближенно вычислить как значение арифметической прогрессии:

$$\hat{N}_{1+t} = N_1 + 2{,}3t. \qquad (1)$$

Так, например,

$$\hat{N}_{11} = N_1 + 2{,}3 \cdot 10 = 241{,}7 + 23 = 264{,}7.$$

Полученное модельное значение (его обозначают такой же буквой, но с крышечкой, чтобы отличить от соответствующего значения ряда) оказалось достаточно близким к значению исходного ряда. В табл. VII.12 в столбце *4* приведены исходные данные о населении, в столбце *3* — модельные данные, а в столбце *2* — отклонения исходных данных от модельных. В последние годы периода модель опережает реальный рост населения, но к концу периода вновь приближается к реальному значению (год 15). С помощью модели

$$\Delta N = 2{,}3, \ \ N_1 = 241{,}7 \qquad (1а)$$

можно предсказать численность населения в 16-м году.

Так появляется прогноз $\hat{N}_{16} = 276{,}2$. Реальное значение в 16-м году оказалось равным 276,3, т. е. прогноз весьма точен и к тому же поменялся знак отклонения модели от реального значения. Это обстоятельство побуждает выяснить, не обладает ли период 10—14-й годы какой-либо особенностью. Для ответа на этот вопрос нужно обратиться к содержанию демографических процессов, к историческим особенностям периода.

В столбце *5* табл. VII.11 приведены темпы роста населения для каждого года, а в столбце *6* — темпы прироста (обе характеристики даны в процентах). Темпы прироста (как и абсолютные приросты) достаточно близки один к другому.

Чтобы найти средний темп роста (а следовательно, и темп прироста) за 14 лет, с 1-го года по 15-й год (обратите внимание: 15 годовых данных отражают рост за 14 лет!), предполагают темп роста равным ежегодно одному и тому же числу Q, т. е.

$$N_2 = Q\,N_1,\;\; N_3 = Q\,N_2 = Q^2\,N_1,\;\ldots,\; N_{15} = Q^{14}\,N_1.$$

Следовательно,

$$Q = \sqrt[14]{\frac{N_{15}}{N_1}} = \sqrt[14]{\frac{273{,}8}{241{,}7}} \approx 1{,}009.$$

Теперь можно предложить еще одну модель данного временно́го ряда:

$$\hat{N}_{t+1} = N_1 \cdot 1{,}009^t, \tag{2}$$

или

$$Q = 1{,}009, \quad N_1 = 241{,}7. \tag{2а}$$

Соответствующие этой модели значения численности населения приведены в столбце *5* табл. VII.12, а отклонения модели от значений ряда — в столбце *6*.

Анализ отклонений позволяет ответить на вопрос, какая из двух рассмотренных моделей лучше приближает исходные данные (см. табл. VII.12).

Прежде всего определяется средняя величина отклонений:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{N}_i - N_i).$$

Модель (1): $\frac{1{,}7}{14} \approx 0{,}1.$ Модель (2): $-\frac{2{,}0}{14} \approx -0{,}1.$

Таблица VII.12

Приближение с помощью двух простейших моделей

Год	Отклонение (3—4)	Модель (1)	Население, млн. человек	Модель (2)	Отклонение (5—4)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	0	241,7	241,7	241,7	0
2	+0,1	244,0	243,9	243,9	0
3	0	246,3	246,3	246,1	−0,2
4	0	248,6	248,6	248,3	−0,3
5	0	250,9	250,9	250,5	−0,4
6	−0,1	253,2	253,3	252,8	−0,5
7	−0,1	255,5	255,6	255,0	−0,6
8	−0,1	257,8	257,9	257,3	−0,6
9	0	260,1	260,1	259,7	−0,4
10	+0,3	262,4	262,1	262,0	−0,1
11	+0,2	264,7	264,5	264,4	+0,1
12	+0,4	267,0	266,6	266,7	+0,1
13	+0,5	269,3	268,8	269,1	+0,3
14	+0,4	271,6	271,2	271,6	+0,4
15	+0,1	273,9	273,8	274,0	+0,2
16	−0,1	276,2 (прогноз)	276,3	276,5 (прогноз)	+0,2

(Хотя в табл. VII.12 содержится 15 исходных значений ряда, сумму чисел в каждом из столбцов *2* и *6* делят на 14. Дело в том, что отклонений тоже по существу имеется только 14, так как модель определена таким образом, что модельное значение года 1 совпадает с фактическим значением данного ряда.)

Может быть также рассчитана средняя величина абсолютного отклонения:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\hat{N}_i - N_i|.$$

Модель (1): $\frac{2,3}{14} \approx 0,2$. Модель (2): $\frac{4,2}{14} \approx 0,3$.

Из теоретических соображений обычно рассчитывают среднеквадратическое отклонение:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{N}_i - N_i)^2}{n}}.$$

Модель (1): $\sqrt{\frac{0,66}{14}} = 0,22$. Модель (2) $\sqrt{\frac{1,74}{14}} = 0,35$.

По всем характеристикам модель (1) выглядит предпочтительнее модели (2). К тому же у модели (2) наблюдается тот же недостаток, что и у модели (1): в конце периода модель заметно опережает исходные данные. Однако если на протяжении почти двух третей всего периода первая модель давала превосходное приближение к исходным данным, то значения, генерируемые второй моделью, систематически меньше значений моделируемого ряда. Поэтому говорить об особенностях последнего периода на основе второй модели труднее. Скорее, можно высказать сомнения как по поводу приемлемости самой формы модели, так и по поводу выбора начальной точки периода. Вполне могло случиться, что год 1 был особым и нетипичным с точки зрения роста населения. На такое предположение наталкивает низкий темп прироста в году 2 в сравнении с четырьмя последующими годами. Нетипичным был и год 15-й, когда также наблюдался резкий скачок темпа. Отсюда не следует, что значения для годов 1 и 15 нужно исключить. Просто не следует требовать от модели, чтобы ее начальное значение обязательно совпадало со значением 241,7 для года 1.

Можно поставить задачу так: найти средний для периода темп роста и такое значение ряда в году 1, чтобы модельные значения как можно меньше отклонялись от реальных.

Попытаемся сначала уточнить таким образом модель (1). Для нее среднее значение прироста $\Delta N = 2{,}3$ уже найдено и остается так выбрать начальное значение, чтобы отклонения модели от значений данного ряда были наименьшими, т. е. чтобы наименьшей была сумма квадратов всех отклонений. Это означает, что начальное значение арифметической прогрессии неизвестно и модель нужно записать в виде

$$\Delta N = 2{,}3, \quad N_1 = a,$$

т. е.

$$\hat{N}_{1+t} = a + 2{,}3t. \tag{3}$$

Для года с номером t отклонение модели (3) от реальных данных N_t будет равно

$$a + 2{,}3t - N_t,$$

а сумма квадратов всех отклонений за годы $1 - 15$

$$\sum_{t=0}^{14} (a + 2{,}3t - N_t)^2. \tag{4}$$

Нужно так выбрать неизвестное a, чтобы эта сумма была наименьшей. Продифференцируем (4) по a и приравняем производную нулю:

$$\sum_{t=0}^{14} [2(a + 2{,}3t - N_t)] = 0.$$

Остается осуществить суммирование. При этом можно отбросить коэффициент 2. Следует заметить, что параметр a войдет в каждое из слагаемых, т. е. встретится 15 раз. Поэтому

$$15a + 2{,}3 \sum_{t=0}^{14} t - \sum_{t=0}^{14} N_t = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} N_t - \frac{2{,}3}{15} \sum_{t=0}^{14} t\,. \tag{5}$$

Первое слагаемое в формуле (5) — средняя за период численность населения, а во втором сумма может быть легко рассчитана непосредственно:

$$\sum_{t=0}^{14} t = \sum_{t=1}^{14} t = \frac{(1+14)\cdot 14}{2} = 15 \cdot 7.$$

Для a можно получить и такое выражение:

$$a = \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} (N_t - 2{,}3t) = \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} \{N_0 + [N_t - (N_0 + 2{,}3t)]\} =$$

$$= N_0 + \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} [N_t - (N_0 + 2{,}3t)] =$$

$$= N_0 - \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} [(N_0 + 2{,}3t) - N_t].$$

Последнее слагаемое представляет собой среднюю арифметическую всех отклонений модельных значений от значений ряда, т.е. среднюю арифметическую чисел из столбца *2* табл. VII.12. Так как эта средняя арифметическая (с принятой в расчетах точностью) близка к нулю, то улучшить модель (1) за счет выбора a не удается.

Перейдем теперь к модели (2). Здесь нет твердой уверенности ни относительно выбора значения среднего темпа Q, ни по поводу выбора начальной точки. Поэтому запишем модель в виде

$$\hat{N}_{1+t} = AQ^t. \qquad (6)$$

Таблица VII.13

Уточнение модели (2)

Год	N	$\lg N$	$\Delta\lg N$	$n_1 + 0{,}0039t$	5 – 3	$241{,}8 \times 1{,}009^t$	7 – 2
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	241,7	2,3833		2,3833	0	241,8	+0,1
2	243,9	2,3872	0,0039	2,3872	0	243,9	0
3	246,3	2,3915	0,0043	2,3911	−0,0004	246,2	−0,1
4	248,6	2,3955	0,0040	2,3950	−0,0005	248,4	−0,2
5	250,9	2,3995	0,0040	2,3989	−0,0006	250,6	−0,3
6	253,3	2,4036	0,0041	2,4028	−0,0008	252,9	−0,4
7	255,6	2,4076	0,0040	2,4067	−0,0009	255,2	−0,4
8	257,9	2,4114	0,0038	2,4106	−0,0008	257,5	−0,4
9	260,1	2,4151	0,0037	2,4145	−0,0006	259,8	−0,3
10	262,1	2,4185	0,0034	2,4184	−0,0001	262,1	0
11	264,5	2,4224	0,0039	2,4223	−0,0001	264,5	0
12	266,6	2,4259	0,0035	2,4262	+0,0003	266,8	+0,2
13	268,8	2,4294	0,0035	2,4301	+0,0007	269,2	+0,4
14	271,2	2,4333	0,0039	2,4340	+0,0007	271,7	+0,5
15	273,8	2,4374	0,0041	2,4379	+0,0005	274,1	+0,3
16	276,3					276,6 (прогноз)	+0,3

Прологарифмируем (6) и получим

$$\lg \hat{N}_{1+t} = \lg A + t \lg Q. \qquad (7)$$

Обозначим $\hat{n}_{1+t} = \lg \hat{N}_{1+t}$; $a = \lg A$; $q = \lg Q$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\hat{n}_{1+t} = a + qt. \qquad (8)$$

Если прологарифмировать теперь исходные данные о населении, то возникнет задача, аналогичная рассмотренной для модели (1): нужно будет определить наиболее подходящие значения a и q. Для ряда логарифмов численности населения нужно провести операции, аналогичные тем, которые в табл. VII.12 были осуществлены при построении модели (1) (см. табл. VII.13):

а) рассчитать приросты логарифмов — столбец *4*;

б) найти средний прирост — он равен 0,0039;

в) построить модель для логарифмов численности населения

$$\hat{n}_{1+t} = n_1 + 0{,}0039t \qquad (9)$$

и рассчитать соответствующие ей значения $\hat{n}$ — столбец *5*;

г) рассчитать отклонения $\hat{n} - n$ — столбец *6*;

д) найти a по формуле

$$a = n_1 + \frac{1}{15}\sum_{t=0}^{14}(\hat{n}_{1+t} - n_{1+t}),$$

т. е. значение n_1 изменяется на величину, равную среднему арифметическому значению отклонений, содержащихся в столбце *6*. Таким образом,

$$a = n_1 - (-0{,}0002) = n_1 + 0{,}0002 = 2{,}3835.$$

Итак, модель (8) окончательно примет вид

$$\hat{n}_{1+t} = 2{,}3835 + 0{,}0039t. \qquad (10)$$

После ее преобразования к виду (6) получим модель (3):

$$\hat{n}_{1+t} = 241{,}8 \cdot 1{,}009^t. \tag{11}$$

По сравнению с моделью (2) модель (3) лишь незначительно изменилась: на одну десятую уточнено начальное значение N, однако приближение исходного ряда новая модель обеспечивает немного лучше. Сумма квадратов отклонений

$$\sum_{t=0}^{14} (\hat{N}_{1+t} - N_{1+t})^2$$

для модели (3) равна 1,26, а для модели (2) она равнялась 1,69. Поэтому модель (3) приближает исходный ряд лучше, чем модель (2), но хуже модели (1), для которой сумма квадратов отклонений равна 0,75.

Изображение данных в виде графиков и диаграмм. На рис. 111 графически изображены данные о среднедушевом потреблении продукта за годы $N - 1$ и N в четырех

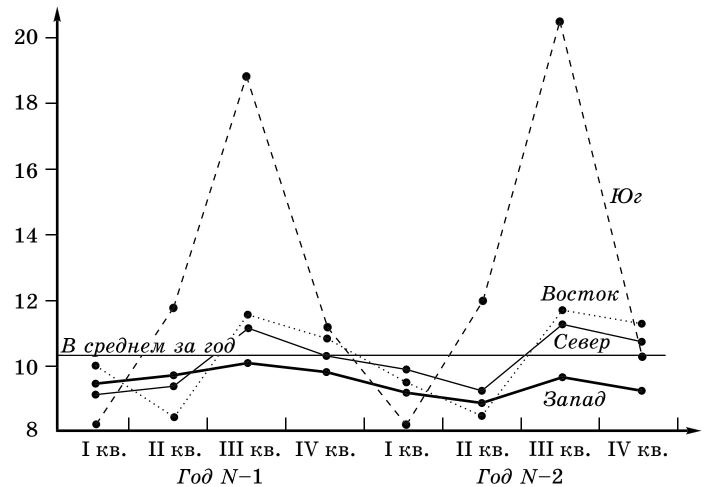


Рис. 111

рассмотренных ранее районах (см. табл. VII.4 и VII.4а). Каждому значению соответствует точка в середине квартала (иногда удобнее брать точку, соответствующую началу или концу квартала).

Ту же информацию можно изобразить в виде *гистограммы*: на рис. 112 каждому значению соответствует свой прямоугольник, высота которого в выбранном масштабе равна уровню потребления в данном квартале, а каждому региону отвечает одна и та же раскраска.

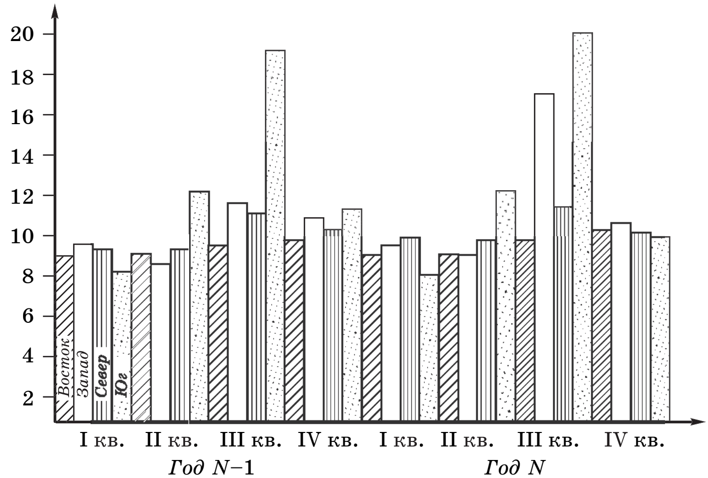


Рис. 112

Два графических способа представления данных о среднедушевом потреблении интересующего нас продукта оказываются в данном случае менее выразительными в сравнении с табличным способом представления этих же даных (см. табл. VII.4 и VII.4а).

Чтобы отразить структуру потребления, можно воспользоваться секторной диаграммой (рис. 113). Площадь каждого сектора пропорциональна доле каждого района в суммарном потреблении за рассматриваемый период (использованы данные из табл. VII.1).

Данные о выработке электроэнергии, и в частности гидроэлектроэнергии, за 1—15 годы (см. табл. VII.10) также можно отразить и графически, и с помощью гис-

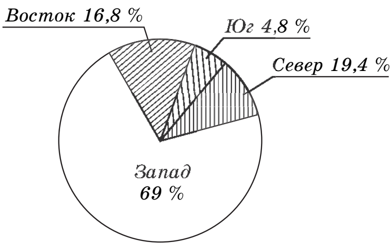


Рис. 113

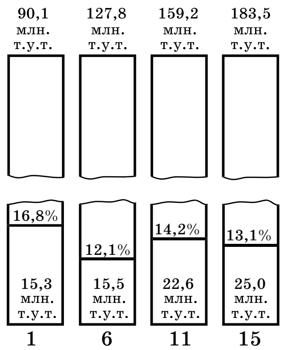


Рис. 114

тограмм. Однако нагляднее содержание этих данных отражает диаграмма, изображенная на рис. 114. в которой отражена информация за годы: 1, 6, 11, 15. Наиболее существенное, что заключают в себе соответствующие данные, — это рост общих объемов производства электроэнергии и изменение доли гидроэлектроэнергии. Поэтому прямоугольники на диаграмме выбраны одинаковой высоты. Сверху приведена величина всей произведенной за год электроэнергии. Доля гидроэлектроэнергии указана в процентах к общему производству электроэнергии. Так как доля гидроэлектроэнергии невелика, то верхнюю часть прямоугольника удобнее изображать не полностью. Из диаграммы видно, что доля гидроэлектроэнергии в общем производстве электроэнергии приблизительно постоянна. Колебания этой доли связаны как с погодными условиями, так и с вводом мощностей гидроэлектроэнергетики, который из-за больших объемов строительства происходит скачкообразно. Наблюдается и некоторая тенденция к снижению удельного веса гидроэнергетики в общем объеме произведенной электроэнергии.

Обобщающие показатели. Пусть имеется набор данных из семи элементов

$$2\ \ 4\ \ 4\ \ 5\ \ 8\ \ 9\ \ 10, \qquad (1)$$

означающих, например, стоимости покупок, сделанных семью покупателями, которые поочередно подходили к кассе в магазине самообслуживания.

Значение элемента (наблюдения), встречающееся наиболее часто, называется *модой*. В данном случае это 4.

Значение элемента (наблюдения), находящегося как бы в центре, в том смысле, что не больше этого значения столько же элементов, сколько не меньше его, называется *медианой*. Для рассматриваемого набора данных это 5 (четыре элемента 2, 4, 4 и 5 не превосходят 5 и четыре элемента 5, 8, 9, 10 не меньше 5).

Величина M, равная частному от деления суммы всех элементов рассматриваемого набора данных на число всех элементов, называется *среднеарифметическим значением* или просто *средней*. Для набора данных (1) средняя равна 6. Для набора данных $X_1, X_2, \dots, X_n$ средняя равна

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Три указанные характеристики набора, или совокупности данных, обладают особыми свойствами, которые определяют характер их использования.

У совокупности данных может не существовать моды:

$$2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6,$$

может быть две моды:

$$2\ 3\ 3\ 5\ 6\ 6\ 7$$

или несколько мод. Появление нового оригинального (т. е. не встречавшегося до этого) значения не изменяет моду.

При изучении поступающих данных модой интересуется представитель фабрики, производящей одежду, если он хочет определить наиболее ходовые размеры, а также цену, по которой чаще всего покупают продукцию его фабрики, или модель, пользующуюся наибольшей популярностью.

Медиана была определена так, что она существует лишь для набора данных с нечетным числом элементов. Когда в наборе имеется четное число элементов, то можно указать два из них, находящихся «в центре». Например, для данных

$$2\ 4\ 4\ 5\ 8\ 9\ 10\ 14 \qquad (2)$$

ближе к центру находятся значения 5 и 8. В таком случае медианой считают среднее арифметическое значение этих чисел, т.е. 6,5. Значение медианы не изменится, если большие значения станут еще больше, а малые — еще меньше. Так, если последние два значения в наборе (2) станут равными 100 и 140, т.е. увеличатся в 10 раз, то медиана останется прежней и будет равна 6,5. Поэтому медианой пользуются для характеристики данных, в которых имеются редкие, но очень сильные отклонения от преобладающих значений. Например, если один из сотрудников отдела получил Государственную премию, то в качестве представительной характеристики доходов этой группы трудящихся за данный месяц следует выбрать значение медианы. Если же взять значение средней, то оно окажется сильно смещенным, поскольку доход одного из сотрудников за этот месяц будет соизмерим с доходом всех остальных.

Средняя арифметическая, или просто средняя, чувствительна к любому изменению значений набора данных. Для набора данных (1) она равна 6, для набора данных (2) ее значение равно 7, а если в наборе (2) заменить два последних элемента на 100 и 140, то значение средней окажется равным 34.

Если взять любой набор данных и из каждого вычесть значение средней, например

$$-\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 14 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline -5 & -3 & -3 & -2 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array},$$

то получим набор чисел (отклонений от средней), сумма которых обязательно равна нулю. Верно и обратное: если сумма всех отклонений данных от некоторого значения равна нулю, то это значение является средней.

Средняя обладает еще одним важным свойством. Можно составить все отклонения элементов набора данных от любого числа и рассчитать сумму квадратов этих отклонений. Сумма квадратов отклонений будет минимальной тогда и только тогда, когда отклонения рассчитывались от средней. Для набора данных (2) сумма квадратов отклонений от средней равна 110. Если рассчитать отклонения от числа 8, то получим значения

$$-6 \quad -4 \quad -4 \quad -3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 6,$$

и сумма квадратов отклонений будет равна 118.

Если каждый элемент набора данных увеличить (уменьшить) на одну и ту же постоянную величину, то средняя увеличится (уменьшится) на эту же величину. Если каждый элемент набора данных умножить (разделить) на одну и ту же постоянную величину, то значение средней нужно будет умножить (разделить) на эту же величину. Например, средняя набора данных

$$4 \quad 8 \quad 8 \quad 10 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 28,$$

полученного умножением набора данных (2) на 2, будет равна 14, т. е. равна значению средней (2), умноженному на 2.

По отклонениям от средней можно рассчитать характеристики степени рассеяния данных X_1, X_2, ..., X_n вокруг найденного среднего значения M:

дисперсия

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1 - M)^2;$$

стандартное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D}\,.$$

Для обозначения дисперсии пользуются также символом σ^2. Вообще, дисперсия есть среднеквадратическое отклонение от средней, т.е. сумму квадратов всех отклонений нужно было бы разделить на n. Однако число M само получено с помощью X_i и поэтому возникает ситуация, с которой мы встречались при анализе данных табл. VII.12. Там совпадение начальных значений было постулировано заранее и поэтому при расчете среднего отклонения оно не учитывалось. Здесь тоже заранее говорится, что отклонения мы рассчитываем от средней, полученной на основе тех же самых данных, т. е. гарантируется, что средняя всех отклонений равна нулю. В силу этого как бы теряется одно наблюдение.

Характеристики рассеяния (вариации) не зависят от значения средней непосредственно. Если ко всем элементам набора данных прибавить одно и то же число, то дисперсия и стандартное отклонение не изменятся. При умножении всех элементов некоторого набора данных на одно и то же число стандартное отклонение нужно будет умножить на это же число, а дисперсию — на его квадрат.

Для набора данных (2)

$$\sigma^2 = \frac{110}{7} = 15{,}71, \quad \sigma = 3{,}96.$$

Часто ставят задачу сравнить между собой два набора попарно соответствующих друг другу данных. Например, нужно сопоставить изменение во времени двух показателей: рост населения страны (X в млн. человек) и увеличение производства электроэнергии (Y в млн. т условного топлива — т у.т.).

Прежде чем решать задачу сопоставления, каждый набор данных удобно *стандартизовать*:

1) рассчитать среднюю;
2) найти отклонения от средней;
3) вычислить стандартное отклонение;
4) разделить каждое отклонение от средней на величину стандартного отклонения.

Все эти расчеты для двух рассматриваемых наборов данных представлены в табл. VII.14, столбцы которой расположены так, чтобы стандартизованные ряды было удобнее сравнивать. В результате процесса стандартизации у каждого из двух рядов средняя равна нулю, а дисперсия равна единице. Глядя на стандартизованные ряды, легко заметить сходство в их поведении: оба ряда возрастают, принимая к тому же близкие значения. Такие ряды называют *положительно коррелированными*. Если же при возрастании одного ряда другой убывает, то они будут *отрицательно коррелированными*. Для измерения степени корреляции между двумя стандартизованными наборами данных пользуются *коэффициентом корреляции*, который равен средней величине попарных произведений стандартизованных переменных x_i и y_i:

$$R = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Сумма попарных произведений делится на $n - 1$, а не на n по тем же соображениям, по которым в формулу для дисперсии тоже входит $n - 1$. Для данных из табл. VII.14 $R = 0{,}998$.

Если средние значения для исходных данных рассчитаны и равны соответственно M_X и M_Y, то формулу для расчета коэффициента корреляции можно записать так:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_X)(Y_i - M_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_X)^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - M_Y)^2}}.$$

Коэффициент корреляции изменяется между −1 и 1. Если $R > 0$, то возрастание (убывание) X сопровождается, вообще говоря (т.е. не совсем строго, чем ближе R к 1, тем более явно выражена эта связь), возрастанием (убыванием) Y. Если $R < 0$, то имеет место обратное соотношение: с возрастанием (убыванием) X переменная Y убывает (возрастает).

Если вернуться к исходным, не подвергшимся стандартизации данным для X и Y, то нетрудно убедиться в том, что найденная высокая корреляция между рядами объясняется в значительной мере тем, что оба они монотонно возрастают. Однако приросты этих рядов вовсе не так тесно коррелируют, что видно из табл. VII.15, в которой новые стандартизованные переменные x и y уже соответствуют приростам ΔX и ΔY. Коэффициент корреляции для приростов оказался равным 0,65, и это значение лучше отражает взаимное изменение переменных X и Y.

Таблица VII.14

Сопоставление двух наборов данных

Год	Y	$Y - M_Y$	$y = \frac{1}{\sigma_Y}(Y - M_Y)$	$x = \frac{1}{\sigma_X}(X - M_X)$	$X - M_X$	X
1	91,1	−47,7	−1,66	−1,61	−16,5	241,1
2	98,4	−40,4	−1,40	−1,34	−13,7	243,9
3	105,4	−33,4	−1,16	−1,11	−11,3	246,3
4	112,5	−26,3	−0,91	−0,88	−9,0	248,6
5	120,0	−18,8	−0,65	−0,66	−6,7	250,9
6	127,8	−11,0	−0,38	−0,42	−4,3	253,3
7	136,7	−2,1	−0,07	−0,20	−2,0	255,6
8	141,4	2,6	0,09	0,03	0,3	257,9
9	147,8	9,8	0,34	0,24	2,5	260,1
10	152,3	13,5	0,47	0,44	4,5	262,1
11	159,2	20,4	0,71	0,67	6,9	264,5
12	163,1	24,3	0,84	0,88	9,0	266,6
13	168,1	29,3	1,02	1,10	11,2	268,8
14	174,4	35,6	1,24	1,33	13,6	271,2
15	183,5	44,7	1,55	1,58	16,2	273,8
$M_Y = 138{,}8$		$\sigma_Y = 28{,}80$	$R = 0{,}998$	$\sigma_X = 10{,}22$	$M_X = 257{,}6$	

Коффициент корреляции позволяет установить связь между стандартизованными переменными y и x и записать ***уравнение регрессии*** для стандартизованных переменных:

$$y = Rx. \tag{3}$$

С этого момента переменные y и x, а следовательно, и переменные Y и X неравноправны, поскольку одна из них объясняется с помощью другой посредством коэффициента, как правило, отличного от нуля. В данном случае x — *объясняющая стандартизованная переменная*; y — *объясняемая стандартизованная переменная*.

Таблица VII.15

Сопоставление приростов

Год	ΔY	$\Delta - M_{\Delta Y}$	$y = \frac{1}{\sigma_{\Delta Y}}(\Delta Y - M_{\Delta Y})$	$x = \frac{1}{\sigma_{\Delta X}}(\Delta X - M_{\Delta X})$	$\Delta X - M_{\Delta X}$	ΔX
2	7,3	0,7	0,441	−1,275	−0,2	2,1
3	7,0	0,4	0,252	0,637	0,1	2,4
4	7,1	0,5	0,315	0,000	0,0	2,3
5	7,5	0,9	0,567	0,000	0,0	2,3
6	7,8	1,2	0,756	0,637	0,1	2,4
7	8,9	2,3	1,448	0,000	0,0	2,3
8	4,7	−1,9	−1,197	0,000	0,0	2,3
9	6,4	−0,2	−0,126	−0,637	−0,1	2,2
10	4,5	−2,1	−1,322	−1,912	−0,3	2,0
11	6,9	0,3	0,189	0,637	0,1	2,4
12	3,9	−2,7	−1,700	−1,275	−0,2	2,1
13	5,0	−1,6	−1,008	−0,637	−0,1	2,2
14	6,3	−0,3	−0,189	0,637	0,1	2,4
15	9,1	2,5	1,574	1,912	0,3	2,6

$M_{\Delta Y} = 6{,}6$ $\sigma_{\Delta Y} = 1{,}588$ $R = 0{,}65$ $\sigma_{\Delta X} = 0{,}157$ $M_{\Delta X} = 2{,}3$

Если их поменять местами, то нужно будет записать такое уравнение регрессии:

$$x = Ry, \tag{4}$$

т. е. уравнениям (3) и (4) соответствуют графики, симметричные относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. На рис. 115 изображены линии регрессии, соответствующие уравнениям, связывающим стандартизованные переменные:

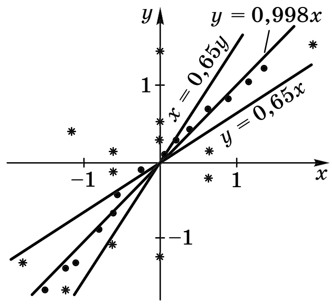


Рис. 115

$y = 0{,}998x$ — регрессия для стандартизованных исходных данных;

$y = 0{,}65x$ — регрессия для стандартизованных приростов;

$x = 0{,}65y$ — обратная регрессия для стандартизованных приростов.

Каждая из полученных таким образом линий регрессии наилучшим образом приближает исходные данные. Другими словами, если в исходное уравнение подставить наблюдавшиеся значения объясняющей переменной и рассчитать по ним значения объясняемой переменной, а затем составить разности между наблюдавшимися и расчетными значениями, то сумма квадратов этих разностей будет минимальной, т.е. минимальной будет дисперсия отклонений наблюдавшихся значений объясняемой переменной от линии регрессии. Очень важно помнить, что отклонения измеряются вдоль оси объясняемой переменной. При переходе от регрессии (3) к регрессии (4) изменяется и направление, вдоль которого измеряются отклонения. Этим и объясняется несовпадение двух линий регрессии, соответствующих одним и тем же исходным данным, если при выводе уравнения регрессии исходить из минимального значения суммы квадратов отклонений.

Чтобы перейти от уравнения регрессии (3) к уравнению, связывающему исходные переменные Y и X, нужно как бы «обратить» процесс стандартизации переменных. Приведем окончательные формулы, позволяющие найти *коэффициенты регрессии*:

$$Y = bX + a; \tag{5}$$

$$b = R\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}; \quad a = M_Y - bM_X, \tag{6}$$

где R — коэффициент корреляции между Y и X, рассчитанный по имеющимся данным; σ_Y и σ_X — дисперсии; M_Y и M_X — средние, рассчитанные по тем же данным.

Получим уравнения:

$$Y = 2{,}812X - 585{,}7;$$

$$\Delta Y = 6{,}575\ \Delta X - 8{,}521;$$

$$\Delta X = 0{,}0643\ \Delta Y + 1{,}876.$$

VIII. Приближенные вычисления

30. Практика приближенных вычислений

30.1. Числа точные и неточные. Погрешность

Точные числа получаются, например, в результате счета. Однако, строго говоря, понятие точного числа — математическая абстракция. Когда каждому действительному числу мы ставим в соответствие единственную точку на числовой оси, мы тем самым вводим понятие *точного* числа.

Числовая ось задана, если задана прямая, на которой указаны две различные точки: 0 и 1. Взаимное расположение точек 0 и 1 указывает на числовой оси *направление возрастания* чисел. Расстояние между точками 0 и 1 — *масштаб* измерений. Обычно 1 располагается правее 0.

Когда число представлено точкой на числовой оси, оно для нас *точное*. Имея в распоряжении циркуль и линейку (а в геометрии все построения ведут только с помощью циркуля и линейки), можно построить на числовой оси множество точек и теоретически заполнить ее как угодно точно. Конечно, при этом принимаются еще две гипотезы: об абсолютной точности циркуля и об отсутствии «кривизны» у линейки, осуществимость этих предположений — тоже математическая абстракция.

Измерив циркулем масштаб, можно последовательно найти точки, соответствующие всем целым числам. Каждый отрезок AB числовой оси легко поделить на k частей, где k — число натуральное. Для этого достаточно воспользоваться любой прямой, проведенной через один его конец A, от точки A отложить на ней k равных отрезков AC_1, C_1C_2, C_2C_3, ..., $C_{k-1}C_k$, соединить C_k с точкой B, а через точки C_1,

C_2, ..., $C_{k\text{-}1}$ провести прямые, параллельные BC_k (рис. 116).

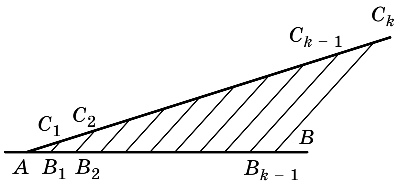


Рис. 116

Получена процедура (алгоритм), позволяющая с любой плотностью заполнять числовую ось рациональными числами, т.е. числами вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые, $q \neq 0$. Среди этих чисел не будет $\sqrt{2}$. Но число $\sqrt{2}$ тоже можно построить — это гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 1. Отложив на числовой оси от 0 отрезок $\sqrt{2}$, можно заполнить числовую ось точками $\sqrt{2}\,\frac{p}{q}$.

Прямоугольный треугольник с катетами 1 и $\sqrt{2}$ имеет гипотенузу, равную $\sqrt{3}$. Так мы получим возможность разместить на числовой оси точки, соответствующие числам вида $\sqrt{3}\,\frac{p}{q}$. Шаг за шагом мы построим любой отрезок $\sqrt{n}$. Можно строить и более сложные иррациональные числа.

Не для любого точного числа можно построить соответствующую ему точку на числовой оси с помощью циркуля и линейки. Например, не удается сделать это для числа π (нет способа «спрямить» длину окружности) и для числа e. Таким образом, существуют числа, которые можно определить как точные, но для которых нет способа их точного представления в виде точки на числовой оси или в виде дроби. Эти числа удается записать или представить только *приближенно*. На числовой оси можно указать *интервал*, в котором окажется каждое такое число.

С приближенными числами мы сталкиваемся уже при переводе обыкновенных дробей в десятичные. Так, в записи $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$ и слева, и справа стоят точные числа. Производить арифметические действия с периодическими дробями, сохраняя их абсолютную точность, не очень удобно, да и смысла особого в этом нет, если другие числа, с которыми приходится оперировать, являются приближенными. Поэтому в учебниках и не излагается теория операций с периодическими десятичными дробями, хотя с уверенностью можно утверждать, что сумма и произведение периодических десятичных дробей есть непременно новая периодическая дробь, и указать правила получения периодов суммы и произведения из периодов слагаемых или сомножителей. В вычислениях вместо 0,(3) берут конечную десятичную дробь, ограничиваясь нужной точностью, т.е. 0,33; 0,333; 0,3333,… . Каждое из этих чисел — *приближенное значение* числа $\frac{1}{3}$, и для каждого из них можно оценить *точность приближения*, или *погрешность*, или *ошибку измерения*. Если в качестве приближенного значения числа 0,(3) мы берем 0,3333, то ошибка не превышает 0,00004.

Когда приближенное значение числа дано в виде десятичной дроби, где последний знак округлен и другой информации об отброшенных последующих знаках нет, мы можем утверждать, что ошибка не превышает половины единицы последнего разряда.

Определение. Если A — *точное число* и a — его приближенное значение, то a — *оценка* числа A с *точностью* $\delta > 0$ при условии, что $|A - a| < \delta$. Геометрически это означает, что соответствующая приближенному значению a точка попадает в интервал $(A - \delta, A + \delta)$ (рис. 117).

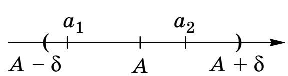


Рис. 117

Величину $\delta > 0$ называют *абсолютной погрешностью* приближенного значения a, а величину $\varepsilon = \delta/a$ — его *относительной погрешностью*. Значение относительной погрешности часто указывают в процентах или промилле. С уменьшением относительной погрешности возрастает *точность*, с которой известна интересующая нас величина.

Оценки абсолютной и относительной погрешностей существенно зависят от того, что известно о значениях A и a. Если, например, $e = 2{,}718$ и более точное значение e неизвестно, то абсолютную погрешность можно полагать равной половине последнего разряда, т. е. $\delta = 0{,}0005$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{0{,}0005}{2{,}718} = \frac{5}{271800} = \frac{1}{5436} \approx 0{,}00018, \text{ или } 0{,}018\%.$$

Если же известно более точное значение $e = 2{,}71828$, то мы убедимся, что приближение $e = 2{,}718$ является более точным, чем мы предполагали до этого:

$$\delta = 0{,}00028 \text{ и } \varepsilon = \frac{0{,}00028}{2{,}718} = \frac{28}{271800} \approx 0{,}000103,$$
$$\text{или } 0{,}0103\%.$$

В некоторых случаях известно, в какую половину (левую или правую) интервала $(A - \delta,\ A + \delta)$ попадает точка a. Если a_1 находится в левой половине, то говорят, что для A значение a_1 — *приближение с недостатком*; если a_2 — в правой половине, то a_2 — *приближение числа A с избытком*.

Запись $a \approx A$ означает, что a — *приближенное значение A*. Например, $\pi \approx 3{,}14$ или $\sqrt{3} \approx 1{,}71$. Здесь под A подразумевают числа π и $\sqrt{3}$, а числа 3,14 и 1,71 — их приближенные значения соответственно. В общем случае из записи $a \approx A$ не следует определенно, какое из чисел a и A является точным значением, а какое — приближенным. Ясность может появиться в контексте.

30.2. Порядок числа. Значащие цифры

Работники бухгалтерии извечно страдают от необходимости одинаково тщательно обрабатывать документы о миллионных и копеечных тратах. Пока составление балансов не было поручено компьютеру, это обстоятельство приводило к бесконечным пересчетам и корректировкам из-за копеечных расхождений. Компьютеры упростили труд бухгалтера, но не устранили страсти к абсолютной точности учета всех движений денег (проводок). Возможно, тезисы о том, что «деньги любят счет», а «копейка рубль бережет», оправдывают подобную традицию. Понятно, что взвешивать слона и муравья на одних и тех же весах невозможно. Определять массу слона не имеет смысла с более высокой точностью, чем 1 кг, так как если слона после взвешивания помыть и высушить, он потеряет несколько килограммов пыли и грязи. Для взвешивания муравья нужны весы, обеспечивающие точность хотя бы до десятых долей миллиграмма. Данные о том, что слон имеет массу 3273 кг, а муравей — 1,2 мг, приведены с различной относительной точностью. Для слона $\varepsilon = \frac{0,5}{3273} \approx 0,00015$, т. е. $0,015\%$, а для муравья $\varepsilon = \frac{0,55}{1,2} \approx 0,042$, т. е. $4,2\%$. Это можно было предвидеть. В записи массы слона использованы 4 значащие цифры, т.е. в 4 последовательных десятичных разрядах указан результат измерения. При этом единицы измерения в соседних разрядах отличаются одна от другой в 10 раз. Таким образом, единица измерения в первом значащем разряде в 1000 раз больше, чем в последнем — четвертом. Для измерения массы муравья использованы только два соседних разряда. Этот инструментарий значительно беднее, его возможности меньше, а относительная погрешность достаточно велика.

Значащие цифры в записи числа *несут информацию о его величине* и *о точности* (абсолютной или относительной), с которой это число известно. Точное число 100 можно записать по-разному: 100; 100,00; 000100,000 и т.п. Писать нули перед числом — смысла нет. А вот нули после запятой имеют смысл, если нам не сообщили заранее, что число 100 точное. Мы тем самым получаем информацию о том, что число 100 измерено с определенным запасом точности. Поэтому в записи 100,00 все пять цифр являются значимыми. Необходимо понимать, что утверждение $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ является верным, в то время как запись $\sqrt{2} \approx 1{,}4100$ ошибочна. Первая запись содержит вполне определенное указание на точность, с которой правая часть представляет левую. Вторая запись вводит пользователя в заблуждение, ибо он полагает, что отклонение правой части от левой не превышает 0,00005.

Полезная характеристика числа — его *порядок* — число разрядов, отделяющих от запятой вертикальную линейку, проведенную перед первой значащей цифрой этого числа. Если число больше единицы, то его порядок равен числу значащих цифр до запятой. Если число меньше 1, но не меньше 0,1, то его порядок равен 0. Для чисел, меньших 0,1, порядок есть число отрицательное, равное по модулю числу нулей между запятой и первой значащей цифрой.

Число	3,14159	8129,591	0,632	0,00241
Порядок	1	4	0	–2

Каждое действительное число $M > 0$, имеющее порядок α, можно записать в виде произведения числа m, имеющего порядок 0 (т. е. $0{,}1 \leqslant m < 1$), и выражения 10^{α}. Таким образом,

$$M = m \cdot 10^{\alpha}.$$

Примеры:

$0{,}0000324 = 0{,}324 \cdot 10^{-4}$;
15 миллиардов 159 миллионов $= 0{,}15159 \cdot 10^{12}$;
$\pi = 3{,}14159 = 0{,}314159 \cdot 10$.

Подобная запись позволяет хранить данные в электронном виде, совершать с ними необходимые операции, оценивать погрешности полученных в результате таких операций величин.

30.3. Округление. Верные знаки

Поскольку каждое действительное число $M > 0$, имеющее порядок α, можно записать в виде

$$M = m \cdot 10^{\alpha},$$

где $0{,}1 \leqslant m < 1$, а α — порядок числа M, то каждому действительному числу соответствует его представление в виде десятичной дроби m. В этом представлении первая значащая цифра располагается сразу после запятой и число используемых значащих цифр равно числу знаков после запятой. В записи десятичных чисел обычно сохраняют только верные знаки, достаточные для осуществления намеченных вычислений, а остальные — отбрасывают (простое округление). В этом случае погрешность может достигать единицы последнего значащего разряда, однако все значащие цифры являются *верными*.

Увеличить точность вдвое и довести ее до половины единицы последнего разряда позволяет *округление по дополнению*. При этом цифра в последнем значащем разряде остается без изменения, если следующая за ней цифра меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая за ней цифра больше 5 или равна 5. Такое п р а в и л о оправдано, ибо при появлении в записи приближенного числа цифры 5 можно с вероятностью, близкой к 1, ожидать появления отличных от нуля цифр в дальнейших разрядах, т.е. отброшено число, большее половины последнего сохраненного разряда.

Особый случай связан с *округлением точных чисел*, оканчивающихся цифрой 5. Их округляют до четной последней цифры: $0{,}195 \approx 0{,}20$; $0{,}185 \approx 0{,}18$.

Операция «округление по дополнению» не гарантирует, что последняя значащая цифра является верной.

Поэтому в таблицах удобно применять простое округление и ставить звездочку (*) справа от числа, цифру последнего разряда которого следует увеличить на 1. Например, для $e = 2{,}7182818284590$ можно записать такие приближения: 2,71828; $2{,}7182^*$; $2{,}718281^*$. Именно такая форма записи использована в этой книге для представления табличных значений.

30.4. Действия с приближенными числами

Приближенные числа задаются с определенной точностью. Их точность может быть указана границами интервала, в котором содержится данное число a:

$$a \in (a_1,\ a_2);\ a - \delta_1 < a < a + \delta_2,\ \text{где } \delta_1 \text{ и } \delta_2 > 0.$$

Здесь a_1 и $a - \delta_1$ — *нижние границы* соответствующих интервалов, a_2 и $a + \delta_2$ — *верхние границы.*

Для характеристики точности служат также максимальные значения абсолютной и относительной погрешностей (абсолютной и относительной ошибок).

Когда значение a есть результат многократных измерений: $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$, в качестве приближенного значения обычно выбирают *среднее арифметическое значение*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k},$$

а мерой точности служит *средняя квадратическая ошибка* (*среднее квадратическое отклонение*)

$$m = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(A-a)^2}{k-1}}.$$

Если дана десятичная запись приближенного числа, то его точность характеризуется числом значащих цифр. С приближенными числами производят те же действия, что и с точными числами. При этом необходимо оценить точность полученного результата.

Сложение и вычитание производят обычно с числами одного или близких порядков. Тогда можно рассчитывать, что результат (даже при большом числе алгебраических слагаемых, если каждое из них округлено с дополнением) будет достаточно надежным.

Пример 1. Выполнить действия: $431{,}27 + 23{,}5312 + + 4{,}18322$.

Ограничимся округлением до второго знака после запятой, так как абсолютная точность первого слагаемого не позволяет использовать следующие разряды. Получим $431{,}27 + 23{,}53 + 4{,}18 = 458{,}98$.

Пример 2. $23{,}875 - 3{,}34427 \approx 23{,}875 - 3{,}344 = 20{,}531$.

И в том, и в другом примере можно легко убедиться, что ошибка (погрешность) результата не превышает единицы последнего разряда.

Осложнения, связанные с потерей точности, могут возникнуть при вычитании близких по величине чисел: $28{,}45731 - 28{,}43 \approx 28{,}46 - 28{,}43 = 0{,}03$. Здесь абсолютная погрешность результата может достигнуть $0{,}0073$, т.е. относительная погрешность может приблизиться к 25%. В то же время относительная погрешность вычитаемого (она на два порядка больше относительной погрешности уменьшаемого) меньше $0{,}02\%$.

Предложить механический выход из такого положения нельзя. Нужно попытаться уточнить данные о вычитаемом, осмыслить саму задачу, для решения которой потребовались такие операции, и т.п.

Умножение приближенных чисел можно проиллюстрировать на примере, когда одно число — точное и равно π, а другое — приближенное, оно известно с единственной значащей цифрой и равно 3. Что можно сказать о произведении этих чисел? Оказывается, имеющаяся информация чрезвычайно скудна, поскольку второе число — назовем его a — известно с точностью до половины единицы, т.е. оно заключено в интервале $2{,}5 < a < 3{,}5$. Тогда произведение πa окажется в пределах $2{,}5\pi < \pi a < 3{,}5\pi$.

О тригонометрических функциях числа πa можно сказать лишь, что $\cos(\pi a) < 0$.

Умножать приближенные числа удобнее, когда каждое из них записано с указанием его порядка:

$$38{,}25 = 0{,}3825 \cdot 10^2;$$
$$0{,}000275 = 0{,}275 \cdot 10^{-3};\ 137 \text{ миллионов} = 0{,}137 \cdot 10^9.$$

Вначале определяют порядок произведения: он равен сумме порядков сомножителей. Затем сомножители перемножают и в произведении сохраняют столько значащих цифр, сколько их было в множителе с большей относительной погрешностью. Если в произведении после запятой появляется 0, в запись вносят поправку: порядок на 1 уменьшают, а 0 после запятой убирают.

Пример. Вычислить произведение $243{,}52 \cdot 0{,}0344$.

Преобразуем данное произведение:

$$243{,}52 \cdot 0{,}0344 = 0{,}24352 \cdot 10^3 \cdot 0{,}344 \cdot 10^{-1} = \\ = 0{,}24352 \cdot 0{,}344 \cdot 10^2.$$

В произведении мы можем рассчитывать на три верные значащие цифры. Поэтому округлим первый сомножитель до четвертого знака и произведем умножение, учитывая, что отдаленные от нуля разряды не повлияют на результат:

$$\begin{array}{r} 0{,}2435 \cdot 0{,}3 = 0{,}07305 \\ 0{,}243 \cdot 0{,}04 = 0{,}00972 \\ \underline{0{,}24 \cdot 0{,}004 = 0{,}00097} \\ 0{,}08374 \end{array}$$

Таким образом, $243{,}52 \cdot 0{,}0344 \approx 0{,}2435 \cdot 0{,}344 \cdot 10^2 \approx 0{,}0837 \cdot 10^2 = 8{,}37$.

Произведенное перед умножением округление одного из сомножителей может повлиять на последнюю значащую цифру результата. Это и произошло. Выполним действия, ориентируясь на получение пяти значащих цифр, но без предварительного округления:

$$\begin{array}{r} 0{,}24352 \cdot 0{,}3 = 0{,}073056 \\ 0{,}2435 \cdot 0{,}04 = 0{,}009740 \\ \underline{0{,}243 \cdot 0{,}004 = 0{,}000974} \\ 0{,}083770 \end{array}$$

На этот раз оценка результата оказалась иной: 8,38, однако ее точность не изменилась.

Деление приближенных чисел подчиняется тем же правилам, что и умножение: в частном сохраняют столько значащих цифр, сколько их было в одном из данных с меньшей относительной точностью, т.е. с меньшим числом значащих цифр.

Пример. Выполнить действие 343,24 : 0,0725.

Преобразуем данное выражение:

$$343{,}24 : 0{,}0725 =$$
$$= (0{,}34324 \cdot 10^3) : (0{,}725 \cdot 10^{-1}) = 10^4 \cdot 0{,}34324 : 0{,}725.$$

Деление осуществляем обычным образом и производим округление до трех значащих цифр:

$$10^4 \cdot 0{,}34324 : 0{,}725 = 10^4 \cdot 0{,}47343... \approx 0{,}473 \cdot 10^4.$$

Написать в ответе 4730 будет менее корректно, так как в этом случае появляется претензия на то, что и четвертая цифра является значащей.

Возведение в степень с натуральным показателем, большим единицы, делает результат менее надежным по сравнению с числом в основании степени. Однако при возведении в квадрат можно сохранять столько же значащих цифр, сколько их было в основании. При возведении в куб последняя значащая цифра будет менее надежна.

Примеры. 1. Вычислить $21{,}12^2$.

Произведем умножение и сохраним четыре значащих цифры в произведении. Получим $21{,}12^2 \approx 446{,}0$. Поскольку основание степени находится в интервале (21,115; 21,125), то оценим точность полученного результата. Он будет в интервале (445,8; 446,3). Надежными оказываются только три первые значащие цифры.

2. Вычислить $21{,}12^3$.

Произведем умножение и сохраним (с округлением) четыре значащие цифры: $21{,}12^3 \approx 9421$.

Точное значение интересующей нас величины будет лежать в интервале ($21{,}115^3$; $21{,}125^3$), т.е. (9414; 9427). Верными оказываются только две значащие цифры. Третья может отличаться на две единицы.

Извлечение корня натуральной степени $n \geqslant 2$ увеличивает точность по сравнению с точностью подкоренного выражения. Поэтому столько же значащих, сколько их было в подкоренном выражении, можно брать с гарантией.

Пример. $\sqrt{0{,}00245} \approx 0{,}156^* \approx 0{,}157$, $\sqrt{384{,}25} \approx 19{,}602$.

Логарифмирование при вычислениях с приближенными числами следует осуществлять с одним дополнительным десятичным знаком по сравнению с наименьшим числом значащих цифр в данных. В полученном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

Использование таблиц антилогарифмов позволяет найти число, в котором не больше верных значащих цифр, чем в мантиссе исходного числа.

Общие замечания. Если для получения конечного результата требуется провести ряд действий с приближенными числами, то в промежуточных результатах целесообразно сохранять одну дополнительную значащую цифру, а ее отбрасывание и округление произвести в самом конце. Эта рекомендация не служит гарантией того, что все оставшиеся цифры будут верными. По ходу вычислений нужно внимательно следить, чтобы не возникли разности, близкие к нулю, и не приходилось на такие числа делить.

Когда число значащих цифр множителей или число десятичных знаков слагаемых различно, то перед операциями числа округляют, сохраняя лишь одну дополнительную цифру по сравнению с наименее точным числом. По завершении операций в результате оставляют минимальное число значащих цифр, которое содержалось в исходных данных.

Если требуется получить результат с n знаками, то во всех исходных данных лучше брать столько цифр, чтобы обеспечить $n + 1$ цифр результата, и затем провести округление.

30.5. Формулы приближенных вычислений

При малых значениях переменной x приближенные значения некоторых функций можно вычислять по упрощенным формулам. Рядом с каждой из таких приближенных формул указаны предельные значения переменной x, позволяющие получить k верных значащих цифр (табл. VIII.1).

Таблица VIII.1

Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$	Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$(1+x)^2 \approx 1+2x$	0,07	0,022	0,007	$e^x \approx 1+x$	0,09	0,031	0,010
$(1+x)^3 \approx 1+3x$	0,04	0,012	0,004	$10^x \approx 1+2{,}303x$	0,04	0,014	0,004
$\frac{1}{(1+x)} \approx 1-x$	0,06	0,022	0,007	$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x$	0,19	0,090	0,042
$\sqrt{(1+x)} \approx 1+\frac{x}{2}$	0,19	0,062	0,020	$\lg(1+x) \approx$ $\approx 0{,}4343x$	0,14	0,047	0,015
$\sqrt[3]{(1+x)} \approx 1+\frac{x}{3}$	0,20	0,065	0,021	$\lg\frac{1+x}{1-x} \approx$ $\approx 0{,}8686x$	0,25	0,119	0,055

Для вычисления значений тригонометрических функций используются приближенные формулы, в которых значения x выражены в радианах:

	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\sin x \approx x$	0,318 (17°48′)	0,144 (8°15′)	0,067 (3°50′)
$\cos x \approx 1$	0,100 (5°43′)	0,31 (1°48′)	0,010 (0°34′)
$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$	0,576 (33°)	0,314 (18°)	0,174 (10°)
$\operatorname{tg} x \approx x$	0,244 (14°)	0,112 (6°25′)	0,053 (3°02′)
$\operatorname{tg} x \approx x+\frac{x^3}{3}$	0,349 (20°)	0,314 (18°)	0,192 (11°)

Значения ряда функций при других (не малых) значениях x можно получить, используя разложения этих функций в ряд Маклорена. Например,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$).

30.6. Таблицы. Интерполяция

Числовая таблица — прямоугольник, в котором числа расположены «квадратно-гнездовым» способом. Другими словами, по вертикали они образуют столбцы, а по горизонтали — строки. Таким образом, каждое табличное число a_{ij} оказывается на пересечении фиксированной строки i и фиксированного столбца j. Если в таблице m строк и n столбцов, то $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Определение. *Числовая таблица* — множество чисел a_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, расположенных в виде прямоугольника таким образом, что они образуют m строк и n столбцов, а каждое число a_{ij} находится на пересечении столбца с номером i и строки с номером j.

В таблицы можно сводить любые числа. На практике применяются таблицы, в которых и столбцы, и строки имеют определенный смысл. Тогда у столбцов и строк появляются заголовки, облегчающие вход в таблицу и ее использование.

Числовые таблицы давно получили распространение при астрономических и инженерных расчетах. В таблицы стали сводить значения функций, часто употребляемых в расчетах. В первую очередь, тригонометрических функций углов, логарифмов.

Табличные значения приводятся с определенной точностью (с определенным числом значащих цифр) и для аргумента, меняющегося с фиксированным *шагом*. Эти два параметра взаимосвязаны. Для табличных значений с небольшим числом значащих цифр нет смысла выбирать слишком малый шаг — мы не ощутим изменений от одного табличного значения к другому. Бесполезны для пользователя и таблицы, где значащих цифр много, а шаг большой. Тогда изменение от табличного значения к соседнему окажется столь значительным, что нелегко будет сказать нечто определенное о значениях функции, соответствующих промежуточным значениям аргумента.

Когда точность табличных значений (число значащих цифр) и шаг табличного аргумента выбраны правильно, можно определить значения функции для промежуточных значений аргумента. Для этого пользуются *линейной интерполяцией*. Суть линейной интерполяции представлена на рис. 118.

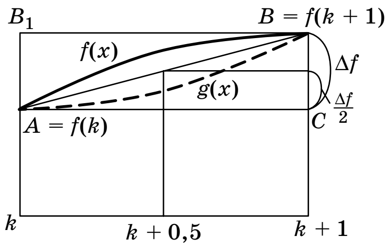


Рис. 118

Здесь $f(x)$ — некоторая реальная функция, для которой составлены таблицы с шагом 1. В нашем случае она возрастает. В таблице приведены значения $f(k)$ и $f(k+1)$. Нужно оценить значение $f(x)$ для десятых долей шага. С этой целью заменяют функцию $f(x)$ отрезком прямой AB

при значениях аргумента x, изменяющихся от $x = k$ до $x = = k + 1$. При этом важно знать, что на данном отрезке функция изменяется монотонно, т.е. либо возрастает, либо убывает. К тому же на всем интервале это возрастание происходит сравнительно равномерно. На отрезке роста аргумента, равном табличному шагу, который здесь принят за 1, значение функции изменилось (возросло) на величину Δf, т.е. $\Delta f = f(k + 1) - f(k)$. Разделив эту разность на 10 равных частей, в качестве приближения для точек $k + 0{,}1$; $k + 0{,}2$; $k + 0{,}3$; $k + 0{,}4$; $k + 0{,}5$ берут соответственно значения $f(k) + 0{,}1 \cdot \Delta f$; $f(k) + + 0{,}2 \cdot \Delta f, \ldots$, т. е.

$$f(k + 0{,}1) = f(k) + 0{,}1 \cdot \Delta f;$$
$$f(k + 0{,}2) = f(k) + 0{,}2 \cdot \Delta f; \quad f(k + 0{,}3) = f(k) + 0{,}3 \cdot \Delta f;$$
$$f(k + 0{,}4) = f(k) + 0{,}4 \cdot \Delta f; \quad f(k + 0{,}5) = f(k) + 0{,}5 \cdot \Delta f.$$

Значения функции для аргументов $k + 0{,}6$; $k + 0{,}7$; $k + 0{,}8$; $k + 0{,}9$ вычисляют, используя $f(k + 1)$:

$$f(k + 0{,}6) = f(k + 1) - 0{,}4 \cdot \Delta f;$$
$$f(k + 0{,}7) = f(k + 1) - 0{,}3 \cdot \Delta f;$$
$$f(k + 0{,}8) = f(k + 1) - 0{,}2 \cdot \Delta f;$$
$$f(k + 0{,}9) = f(k + 1) - 0{,}1 \cdot \Delta f.$$

Таким образом, к каждой строке таблицы можно дать пять величин поправок, соответствующих $0{,}1 \cdot \Delta f$; $0{,}2 \cdot \Delta f$; $0{,}3 \cdot \Delta f$; $0{,}4 \cdot \Delta f$; $0{,}5 \cdot \Delta f$. По ним определяют приближенные значения функции для всех девяти промежуточных значений аргумента $k + 0{,}1i$, где $1 \leqslant i \leqslant 9$.

Надежность результатов, полученных линейной интерполяцией, зависит от характера изменения функции для всех ее значений, расположенных в строке. Если функция изменяется быстро, могут меняться и ее приросты в одной строке. На участках быстрого изменения функции пользоваться поправками нецелесообразно. Для этих участков составляют таблицы без поправок. Так поступают со значениями тангенсов острых углов, близких к 90°, со значениями логарифмов синусов и логарифмов тангенсов острых углов, близких к 0°.

Обратим внимание на то обстоятельство, что интерполяционная прямая AB и интерполяционные значения (см. рис. 118) будут одинаковыми как для функции $f(x)$, так и для функции $g(x)$, изображенной на рис. 3 пунктиром. Интерполяционные значения будут такими же для любой монотонной функции, соединяющей точки A и B, если ее график расположен внутри прямоугольника AB_1BC. Интерполяцию немонотонных функций мы не рассматриваем.

IX. Таблицы

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

% год	годы										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0,1	*1,001*	1,00200	1,00300	1,00400*	1,00501	1,00601*	1,00702	1,00802*	1,00903*	1,01004*	1,01105*
0,2	*1,002*	1,00400	1,00601	1,00802	1,01004	1,01206	1,01408	1,01611	1,01814	1,02018	1,02222
0,3	*1,003*	1,00600*	1,00902*	1,01205	1,01509	1,01813*	1,02118*	1,02425	1,02732*	1,03040*	1,03349*
0,4	*1,004*	1,00801*	1,01204*	1,01609*	1,02016	1,02424	1,02833*	1,03245	1,03658	1,04072*	1,04489
0,5	*1,005*	1,01002*	1,01507*	1,02015	1,02525	1,03037*	1,03552*	1,04070*	1,04591	1,05114	1,05639*
0,6	*1,006*	1,01203*	1,01810*	1,02421*	1,03036	1,03654	1,04276	1,04902	1,05531	1,06164*	1,06801*
0,7	*1,007*	1,01404*	1,02114*	1,02829*	1,03549	1,04274	1,05004	1,05739	1,06479	1,07224*	1,07975
0,8	*1,008*	1,01606	1,02419	1,03238*	1,04064*	1,04897	1,05736	1,06582	1,07434*	1,08294	1,09160*
0,9	*1,009*	1,01808	1,02724	1,03648*	1,04581*	1,05522*	1,06472*	1,07430*	1,08397*	1,09373	1,10357*
1	*1,01*	1,0201	1,03030	1,04060	1,05101	1,06152	1,07213*	1,08285*	1,09368*	1,10462	1,11566*
1,1	*1,011*	1,02212	1,03336	1,04473	1,05622	1,06784	1,07958*	1,09146	1,10346*	1,11560*	1,12787*
1,2	*1,012*	1,02414	1,03643	1,04887	1,06145*	1,07419	1,08708*	1,10013	1,11333	1,12669	1,14021
1,3	*1,013*	1,02616*	1,03950*	1,05302	1,06671	1,08057*	1,09462*	1,10885*	1,12327	1,13787	1,15266*
1,4	*1,014*	1,02819*	1,04259	1,05718*	1,07198*	1,08699*	1,10221	1,11764	1,13329	1,14915*	1,16524*
1,5	*1,015*	1,03022*	1,04567*	1,06136	1,07728	1,09344	1,10984	1,12649	1,14338*	1,16054	1,17794*
1,6	*1,016*	1,03225*	1,04877	1,06555	1,08260	1,09992	1,11752	1,13540	1,15356*	1,17202*	1,19077*
1,7	*1,017*	1,03428*	1,05187	1,06975	1,08793*	1,10643	1,12524	1,14437	1,16382*	1,18361	1,20373
1,8	*1,018*	1,03632	1,05497*	1,07396*	1,09329*	1,11297*	1,13301	1,15340*	1,17416*	1,19530	1,21681*
1,9	*1,019*	1,03836	1,05808*	1,07819	1,09867*	1,11955	1,14082*	1,16250	1,18458*	1,20709*	1,23003
2	*1,02*	1,0404	1,06120*	1,08243	1,10408	1,12616	1,14868*	1,17165*	1,19509	1,21899	1,24337
2,1	*1,021*	1,04244	1,06433	1,08668	1,10950	1,13280	1,15659	1,18088	1,20567*	1,23099*	1,25684*
2,2	*1,022*	1,04448	1,06746	1,09094*	1,11494*	1,13947*	1,16454	1,19016	1,21634*	1,24310*	1,27045*
2,3	*1,023*	1,04652*	1,07059*	1,09522	1,12041	1,14618	1,17254	1,19951	1,22710	1,25532*	1,28419*
2,4	*1,024*	1,04857*	1,07374	1,09951	1,12589*	1,15292	1,18059	1,20892*	1,23794	1,26765	1,29807
2,5	*1,025*	1,05062*	1,07689	1,10381	1,13140*	1,15969	1,18868*	1,21840	1,24886	1,28008	1,31208*
2,6	*1,026*	1,05267*	1,08004*	1,10812*	1,13693*	1,16649*	1,19682*	1,22794	1,25987	1,29262*	1,32623*
2,7	*1,027*	1,05472*	1,08320*	1,11245	1,14248*	1,17333*	1,20501*	1,23755	1,27096*	1,30528	1,34052
2,8	*1,028*	1,05678	1,08637	1,11679	1,14806	1,18020*	1,21325	1,24722*	1,28214*	1,31804*	1,35495
2,9	*1,029*	1,05884	1,08954*	1,12114	1,15365*	1,18711	1,22153*	1,25696	1,29341*	1,33092*	1,36952
3	*1,03*	1,0609	1,09272*	1,12550*	1,15927	1,19405	1,22987	1,26677	1,30477	1,34391*	1,38423
3,1	*1,031*	1,06296	1,09591	1,12988*	1,16491	1,20102	1,23825*	1,27664	1,31621*	1,35702	1,39908*
3,2	*1,032*	1,06502	1,09910	1,13427*	1,17057	1,20803	1,24668*	1,28658	1,32775	1,37024	1,41408*
3,3	*1,033*	1,06708*	1,10230	1,13867*	1,17625*	1,21507	1,25516*	1,29658*	1,33937*	1,38357*	1,42923
3,4	*1,034*	1,06915*	1,10550*	1,14309	1,18195*	1,22214*	1,26369*	1,30666*	1,35109	1,39702*	1,44452*
3,5	*1,035*	1,07122*	1,10871*	1,14752	1,18768*	1,22925*	1,27227*	1,31680*	1,36289*	1,41059*	1,45996*
3,6	*1,036*	1,07329*	1,11193	1,15196	1,19343*	1,23639*	1,28090*	1,32702	1,37479	1,42428*	1,47556

Таблица IX.1

(ТЕМПЫ РОСТА)

годы										% год
12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	
1,01206*	1,01307*	1,01409	1,01510*	1,01612	1,01713*	1,01815	1,01917	1,02019	1,03043*	**0,1**
1,02426*	1,02631	1,02836*	1,03042	1,03248	1,03454*	1,03661*	1,03869	1,04076*	1,06177	**0,2**
1,03659*	1,03970*	1,04282*	1,04595*	1,04909*	1,05224	1,05539*	1,05856*	1,06174	1,09402*	**0,3**
1,04907	1,05326*	1,05747*	1,06170*	1,06595*	1,07022	1,07450	1,07879*	1,08311	1,12722*	**0,4**
1,06167*	1,06698*	1,07232	1,07768	1,08307	1,08848*	1,09392*	1,09939*	1,10489*	1,16140	**0,5**
1,07442	1,08087	1,08735*	1,09388	1,10044	1,10704*	1,11368*	1,12037	1,12709	1,19657	**0,6**
1,08731	1,09492	1,10258*	1,11030	1,11807*	1,12590	1,13378	1,14172	1,14971	1,23277*	**0,7**
1,10033*	1,10914	1,11801	1,12695*	1,13597	1,14506	1,15422	1,16345*	1,17276	1,27003*	**0,8**
1,11350*	1,12353	1,13364	1,14384*	1,15414	1,16452*	1,17500*	1,18558	1,19625	1,30838	**0,9**
1,12682*	1,13809	1,14947	1,16096*	1,17257*	1,18430	1,19614*	1,20810*	1,22019	1,34784*	**1**
1,14028*	1,15282*	1,16551	1,17833	1,19129	1,20439*	1,21764*	1,23103*	1,24458	1,38846	**1,1**
1,15389	1,16774	1,18175	1,19593*	1,21028*	1,22480*	1,23950*	1,25438	1,26943	1,43026	**1,2**
1,16765	1,18283	1,19820*	1,21378	1,22956	1,24554*	1,26174	1,27814	1,29475*	1,47327	**1,3**
1,18155*	1,19810	1,21487	1,23188	1,24912*	1,26661*	1,28434*	1,30233	1,32056	1,51753	**1,4**
1,19561*	1,21355	1,23175*	1,25023	1,26898*	1,28802	1,30734	1,32695	1,34685*	1,56308	**1,5**
1,20983	1,22918*	1,24885	1,26883*	1,28913*	1,30976	1,33072	1,35201	1,37364	1,60994*	**1,6**
1,22419*	1,24500*	1,26617	1,28769*	1,30958*	1,33185	1,35449	1,37752	1,40093*	1,65816*	**1,7**
1,23872	1,26101*	1,28371*	1,30682	1,33034*	1,35429	1,37866*	1,40348*	1,42874*	1,70778*	**1,8**
1,25340	1,27721*	1,30148	1,32621	1,35140*	1,37708*	1,40325	1,42991	1,45708	1,75883*	**1,9**
1,26824	1,29360*	1,31947*	1,34586*	1,37278*	1,40024	1,42824*	1,45681	1,48594*	1,81136	**2**
1,28324	1,31019	1,33770*	1,36579*	1,39447*	1,42376	1,45366	1,48418*	1,51535*	1,86540	**2,1**
1,29840*	1,32697	1,35616*	1,38600	1,41649	1,44765*	1,47950	1,51205	1,54531*	1,92099*	**2,2**
1,31373	1,34395	1,37486	1,40648	1,43883	1,47192*	1,50577*	1,54041	1,57584	1,97819	**2,3**
1,32922*	1,36112*	1,39379*	1,42724*	1,46150	1,49657*	1,53249*	1,56927*	1,60693*	2,03703*	**2,4**
1,34488*	1,37851	1,41297	1,44829*	1,48450*	1,52161*	1,55965*	1,59865	1,63861*	2,09756*	**2,5**
1,36071*	1,39609*	1,43239*	1,46963*	1,50784*	1,54705	1,58727*	1,62854*	1,67088*	2,15983*	**2,6**
1,37671*	1,41389	1,45206*	1,49127	1,53153*	1,57288*	1,61535*	1,65896*	1,70376	2,22389	**2,7**
1,39289	1,43189	1,47198*	1,51320	1,55557	1,59912*	1,64390	1,68993	1,73724*	2,28977*	**2,8**
1,40923*	1,45010*	1,49215*	1,53543	1,57995*	1,62577*	1,67292*	1,72144	1,77136	2,35755	**2,9**
1,42576	1,46853	1,51258*	1,55796*	1,60470*	1,65284*	1,70243	1,75350*	1,80611	2,42726	**3**
1,44246	1,48717*	1,53327*	1,58081	1,62981*	1,68034	1,73243	1,78613*	1,84150*	2,49896	**3,1**
1,45933*	1,50603*	1,55423	1,60396*	1,65529	1,70826	1,76292*	1,81934	1,87756	2,57271	**3,2**
1,47639*	1,52512	1,57544*	1,62743*	1,68114	1,73662	1,79393	1,85313	1,91428	2,64855*	**3,3**
1,49364	1,54442*	1,59693*	1,65123	1,70737	1,76542	1,82544*	1,88751	1,95168*	2,72656*	**3,4**
1,51106*	1,56395*	1,61869	1,67534*	1,73398*	1,79467*	1,85748*	1,92250	1,98978*	2,80679	**3,5**
1,52868	1,58371	1,64072*	1,69979	1,76098*	1,82438	1,89006	1,95810	2,02859	2,88930	**3,6**

%	годы										
год	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
3,7	*1,037*	1,07536*	1,11515*	1,15641*	1,19920*	1,24357*	1,28958*	1,33730	1,38678	1,43809	1,49130
3,8	*1,038*	1,07744	1,11838*	1,16088*	1,20499*	1,25078*	1,29831*	1,34765*	1,39886*	1,45202	1,50720
3,9	*1,039*	1,07952	1,12162	1,16536*	1,21081	1,25803*	1,30710	1,35807*	1,41104	1,46607	1,52324*
4	*1,04*	1,0816	1,12486	1,16985*	1,21665	1,26531*	1,31593	1,36856*	1,42331	1,48024	1,53945
4,1	*1,041*	1,08368	1,12811	1,17436	1,22251	1,27263*	1,32481	1,37913	1,43567*	1,49453*	1,55581*
4,2	*1,042*	1,08576	1,13136*	1,17888	1,22839*	1,27998*	1,33374*	1,38976*	1,44813*	1,50895*	1,57233
4,3	*1,043*	1,08784*	1,13462*	1,18341*	1,23430	1,28737*	1,34273	1,40047	1,46069	1,52350	1,58901
4,4	*1,044*	1,08993*	1,13789	1,18796	1,24023	1,29480	1,35177	1,41125	1,47334*	1,53817	1,60585
4,5	*1,045*	1,09202*	1,14116*	1,19251*	1,24618	1,30226	1,36086	1,42210	1,48609*	1,55296*	1,62285
4,6	*1,046*	1,09411*	1,14444*	1,19708*	1,25215*	1,30975*	1,37000	1,43302	1,49894	1,56789	1,64001*
4,7	*1,047*	1,09620*	1,14773	1,20167	1,25815	1,31728*	1,37919*	1,44402	1,51188*	1,58294*	1,65734*
4,8	*1,048*	1,09830	1,15102	1,20627	1,26417	1,32485	1,38844*	1,45509	1,52493*	1,59813	1,67484
4,9	*1,049*	1,10040	1,15432	1,21088	1,27021*	1,33245*	1,39774*	1,46623*	1,53808	1,61344*	1,69250*
5	*1,05*	1,1025	1,15762*	1,21550*	1,27628	1,34009*	1,40710	1,47745*	1,55132*	1,62889	1,71033*
5.5	*1,055*	1,11302*	1,17424	1,23882	1,30696	1,37884	1,45467*	1,53468*	1,61909	1,70814	1,80209
6	*1,06*	1,1236	1,19101*	1,26247*	1,33822*	1,41851*	1,50363	1,59384*	1,68947*	1,79084*	1,89829*
6.5	*1,065*	1,13422*	1,20794*	1,28646*	1,37008*	1,45914	1,55398*	1,65499*	1,76257	1,87713*	1,99915
7	*1,07*	1,1449	1,22504	1,31079*	1,40255	1,50073	1,60578	1,71818*	1,83845*	1,96715	2,10485
7.5	*1,075*	1,15562*	1,24229*	1,33546*	1,43562*	1,54330	1,65904*	1,78347*	1,91723*	2,06103	2,21560*
8	*1,08*	1,1664	1,25971	1,36048*	1,46932*	1,58687	1,71382	1,85093	1,99900	2,15892	2,33163*
8.5	*1,085*	1,17722*	1,27728*	1,38585*	1,50365*	1,63146*	1,77014	1,92060	2,08385*	2,26098	2,45316*
9	*1,09*	1,1881	1,29502*	1,41158	1,53862	1,67710	1,82803*	1,99256	2,17189	2,36736	2,58042*
9.5	*1,095*	1,19902*	1,31293	1,43766	1,57423*	1,72379	1,88755	2,06686*	2,26322	2,47822*	2,71365*
10	*1,1*	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,77156	1,94871*	2,14358*	2,35794*	2,59374	2,85311*
10.5	*1,105*	1,22102*	1,34923	1,49090	1,64744*	1,82042*	2,01157	2,22278*	2,45618	2,71408	2,99905*
11	*1,11*	1,2321	1,36763	1,51807	1,68505*	1,87041	2,07616	2,30453*	2,55803*	2,83942	3,15175*
11.5	*1,115*	1,24322*	1,38619*	1,54560*	1,72335	1,92153*	2,14251*	2,38890*	2,66362*	2,96994*	3,31149
12	*1,12*	1,2544	1,40492*	1,57351*	1,76234	1,97382	2,21068	2,47596	2,77307*	3,10584*	3,47854*
12.5	*1,125*	1,26562*	1,42382*	1,60180*	1,80203	2,02728*	2,28069*	2,56578	2,88650*	3,24732	3,65323*
13	*1,13*	1,2769	1,44289*	1,63047	1,84243*	2,08195	2,35260*	2,65844	3,00404	3,39456*	3,83586
13.5	*1,135*	1,28822*	1,46213*	1,65952	1,88355*	2,13783*	2,42644*	2,75401*	3,12581	3,54779*	4,02674*
14	*1,14*	1,2996	1,48154	1,68896	1,92541	2,19497	2,50226*	2,85258*	3,25194*	3,70722	4,22623
14.5	*1,145*	1,31102*	1,50112	1,71878*	1,96801	2,25337	2,58011	2,95422*	3,38259	3,87306*	4,43466
15	*1,15*	1,3225	1,52087*	1,74900*	2,01135*	2,31306	2,66001*	3,05902	3,51787*	4,04555*	4,65239
15.5	*1,155*	1,33402*	1,54079*	1,77962	2,05546	2,37406	2,74204	3,16705*	3,65795	4,22493	4,87979*
16	*1,16*	1,3456	1,56089*	1,81063*	2,10034	2,43639*	2,82621*	3,27841	3,80296	4,41143*	5,11726
16.5	*1,165*	1,35722*	1,58116*	1,84205*	2,14599*	2,50008*	2,91260	3,39318	3,95305*	4,60531	5,36519
17	*1,17*	1,3689	1,60161	1,87388*	2,19244*	2,56516	3,00124	3,51145	4,10840	4,80682*	5,62398*
17.5	*1,175*	1,38062*	1,62223	1,90612*	2,23969*	2,63164	3,09218	3,63331	4,26914	5,01624	5,89408*
18	*1,18*	1,3924	1,64303	1,93877*	2,28775*	2,69955	3,18547	3,75885*	4,43545	5,23383*	6,17592*
18.5	*1,185*	1,40422*	1,66400*	1,97184*	2,33663*	2,76891*	3,28116*	3,88818	4,60749*	5,45988*	6,46996
19	*1,19*	1,4161	1,68515*	2,00533*	2,38635	2,83976	3,37931*	4,02138*	4,78544*	5,69468	6,77667
19.5	*1,195*	1,42802*	1,70648*	2,03925*	2,43691	2,91210*	3,47996*	4,15856	4,96948	5,93853	7,09654
20	*1,2*	1,44	1,728	2,0736	2,48832	2,98598	3,58318	4,29981*	5,15978	6,19173*	7,43008
21	*1,21*	1,4641	1,77156	2,14358*	2,59374	3,13842*	3,79749*	4,59497	5,55991*	6,72749*	8,14027

Продолжение табл. IX.1

годы										**%**
12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	**год**
1,54648	1,60370	1,66303*	1,72457	1,78838	1,85455	1,92316*	1,99432*	2,06811*	2,97414*	**3,7**
1,56447	1,62392	1,68563	1,74968*	1,81617	1,88518*	1,95682*	2,03118*	2,10837	3,06140	**3,8**
1,58265*	1,64437*	1,70851	1,77514	1,84437	1,91630	1,99103*	2,06868*	2,14936*	3,15113	**3,9**
1,60103	1,66507	1,73167*	1,80094	1,87298	1,94790	2,02581*	2,10684*	2,19112	3,24339*	**4**
1,61960	1,68600*	1,75513	1,82709	1,90200*	1,97998*	2,06116*	2,14567	2,23364*	3,33827	**4,1**
1,63837	1,70718	1,77888*	1,85359*	1,93145	2,01257	2,09709*	2,18517*	2,27695	3,43582*	**4,2**
1,65734	1,72860*	1,80293*	1,88046	1,96132	2,04565*	2,13362	2,22536*	2,32105*	3,53613*	**4,3**
1,67650*	1,75027*	1,82728*	1,90768*	1,99162*	2,07925*	2,17074*	2,26625*	2,36597	3,63927*	**4,4**
1,69588	1,77219*	1,85194	1,93528	2,02237	2,11337*	2,20847*	2,30786	2,41171	3,74531*	**4,5**
1,71545*	1,79436*	1,87691	1,96324*	2,05355*	2,14802	2,24683	2,35018	2,45829	3,85434	**4,6**
1,73524	1,81679*	1,90218*	1,99159	2,08519*	2,18320	2,28581	2,39324	2,50572*	3,96643*	**4,7**
1,75523*	1,83948*	1,92778	2,02031*	2,11729	2,21892	2,32542*	2,43704*	2,55402*	4,08167*	**4,8**
1,77543*	1,86243*	1,95369*	2,04942*	2,14984*	2,25519	2,36569*	2,48161	2,60321	4,20014*	**4,9**
1,79585*	1,88564*	1,97993	2,07892*	2,18287	2,29201*	2,40661*	2,52695	2,65329*	4,32194	**5**
1,90120*	2,00577	2,11609	2,23247*	2,35526	2,48480	2,62146*	2,76564*	2,91775*	4,98395	**5.5**
2,01219*	2,13292*	2,26090	2,39655*	2,54035	2,69277	2,85433*	3,02559*	3,20713*	5,74349	**6**
2,12909*	2,26748*	2,41487	2,57184	2,73901	2,91704*	3,10665	3,30858*	3,52364*	6,61436*	**6.5**
2,25219	2,40984*	2,57853	2,75903	2,95216	3,15881*	3,37993	3,61652*	3,86968	7,61225*	**7**
2,38177*	2,56041	2,75244	2,95887*	3,18079	3,41935	3,67580	3,95148*	4,24785	8,75495*	**7.5**
2,51817	2,71962	2,93719	3,17216*	3,42594	3,70001*	3,99601*	4,31570	4,66095*	10,0626*	**8**
2,66168*	2,88792*	3,13340	3,39974	3,68872	4,00226	4,34245	4,71156	5,11204*	11,5582*	**8.5**
2,81266	3,06580	3,34172*	3,64248	3,97030*	4,32763	4,71712	5,14166	5,60441	13,2676*	**9**
2,97145*	3,25374*	3,56285	3,90132	4,27194*	4,67778	5,12217	5,60877*	6,14161	15,2203	**9.5**
3,13842*	3,45227	3,79749*	4,17724*	4,59497	5,05447	5,55991*	6,11590*	6,72749*	17,4494	**10**
3,31396	3,66192*	4,04642*	4,47130	4,94079	5,45957	6,03282*	6,66627*	7,36623	19,9925*	**10.5**
3,49845	3,88328	4,31044	4,78458*	5,31089	5,89509	6,54355	7,26334	8,06231	22,8922*	**11**
3,69231	4,11692*	4,59037	5,11826*	5,70686*	6,36315*	7,09492	7,91083*	8,82058	26,1966*	**11.5**
3,89597*	4,36349	4,88711	5,47356*	6,13039	6,86604	7,68996*	8,61276	9,64629	29,9599	**12**
4,10989	4,62362*	5,20158	5,85177*	6,58325	7,40615*	8,33192*	9,37341*	10,5450*	34,2433	**12.5**
4,33452	4,89801	5,53475	6,25427	7,06732*	7,98607*	9,02426*	10,1974	11,5230*	39,1158*	**13**
4,57035*	5,18735*	5,88765	6,68248	7,58461*	8,60854	9,77069*	11,0897	12,5868*	44,6555*	**13.5**
4,81790	5,49241	6,26134*	7,13793*	8,13724*	9,27646	10,5751*	12,0556*	13,7434*	50,9501*	**14**
5,07768*	5,81395	6,65697	7,62223	8,72745*	9,99293*	11,4419	13,1009*	15,0006	58,0984*	**14.5**
5,35025	6,15278*	7,07570*	8,13706	9,35762	10,7612*	12,3754*	14,2317*	16,3665	66,2117*	**15**
5,63616*	6,50977	7,51878*	8,68419*	10,0302	11,5849	13,3806	15,4545*	17,8500*	75,4153	**15.5**
5,93602*	6,88579	7,98751*	9,26552	10,7480	12,4676*	14,4625	16,7765	19,4607*	85,8498*	**16**
6,25044*	7,28177	8,48326	9,88300	11,5136*	13,4134*	15,6266*	18,2050*	21,2089	97,6737	**16.5**
6,58006*	7,69867*	9,00745	10,5387	12,3303	14,4264*	16,8789*	19,7483*	23,1055*	111,064*	**17**
6,92555	8,13752	9,56159	11,2348*	13,2009*	15,5111	18,2255*	21,4150*	25,1627	126,222	**17.5**
7,28759	8,59935*	10,1472	11,9737	14,1290	16,6722	19,6732*	23,2144	27,3930	143,370*	**18**
7,66690*	9,08528	10,7660*	12,7577*	15,1179*	17,9147*	21,2290	25,1564	29,8103	162,761	**18.5**
8,06424	9,59644*	11,4197*	13,5895	16,1715	19,2441	22,9005	27,2516	32,4294	184,675	**19**
8,48037	10,1340	12,1101*	14,4716*	17,2936	20,6659	24,6957*	29,5114	35,2661*	209,429	**19.5**
8,91610	10,6993	12,8391*	15,4070	18,4884	22,1861	26,6233	31,9479*	38,3375*	237,376	**20**
9,84973	11,9181*	14,4209*	17,4494	21,1137*	25,5476*	30,9126*	37,4043	45,2592*	304,481*	**21**

%	годы										
год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	*1,22*	1,4884	1,81584*	2,21533	2,70270*	3,29730	4,02271	4,90770*	5,98740	7,30463	8,91165
23	*1,23*	1,5129	1,86086*	2,28886*	2,81530*	3,46282*	4,25927*	5,23890*	6,44385*	7,92594*	9,74891
24	*1,24*	1,5376	1,90662	2,36421	2,93162*	3,63521*	4,50766*	5,58950*	6,93098*	8,59442*	10,6570*
25	*1,25*	1,5625	1,95312*	2,44140*	3,05175*	3,81469*	4,76837	5,96046	7,45058	9,31322*	11,6415
26	*1,26*	1,5876	2,00037*	2,52047	3,17579*	4,00150	5,04189*	6,35278*	8,00451	10,0856*	12,7079*
27	*1,27*	1,6129	2,04838	2,60144*	3,30383*	4,19587	5,32875*	6,76752	8,59475	10,9153	13,8624*
28	*1,28*	1,6384	2,09715	2,68435	3,43597	4,39804*	5,62949*	7,20575*	9,22337	11,8059	15,1115*
29	*1,29*	1,6641	2,14668*	2,76922*	3,57230*	4,60827	5,94467	7,66862*	9,89253	12,7613*	16,4621*
30	*1,3*	1,69	2,197	2,8561	3,71293	4,82680*	6,27485	8,15730*	10,6044*	13,7858	17,9216

Таблица IX.1. содержит значения темпов роста, соответствующие формуле сложных процентов. При этом табличные значения приводятся *в единицах и долях единицы*, а не в процентах. Смысл понятия «сложные проценты» проще всего раскрывается на примере роста банковского вклада.

Если вклад A лежит в банке несколько лет и годовой банковский процент равен 100α, то начиная со второго года проценты начисляются уже не на первоначальную величину вклада, а на величину, полученную к концу первого года.

Таким образом,

$$A_1 = A(1 + \alpha),\ A_2 = A_1(1 + \alpha) = A(1 + \alpha)^2,\ \ldots ,$$

то есть

$$A_n = A(1 + \alpha)^n. \qquad (*)$$

Это и есть *формула сложных процентов*. Она позволяет ответить на вопрос: *во сколько раз* увеличится вклад, если он пролежал в банке n лет, а годовой банковский процент равен 100α. В таблицу сведены значения $(1 + \alpha)^n$ – темпов роста за n лет для разных значений α и n.

В таблице содержатся только верные значащие цифры; звездочка (*) означает, что при округлении последний знак числа нужно увеличить на 1.

Пример 1. Годовой *прирост* равен 2,3%. Определить, во сколько раз увеличится начальный вклад за 4 года; за 10 лет; за 30 лет.

На пересечении строки 2,3 и столбца 4 найдем число 1,09522, т.е. за 4 года начальный вклад увеличится в 1,09522 раза (*темп роста* равен 109,522%, а *темп прироста* составит 9,522%). За 10 лет вклад возрастет в 1,25533 раза (здесь учтена звездочка), а за 30 лет — в 1,97819 раза, т.е. почти удвоится.

Окончание табл. IX.1

годы 12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	% год
10,8722	13,2641	16,1822	19,7422*	24,0855*	29,3844	35,8489*	43,7357*	53,3576	389,757*	**22**
11,9911*	14,7491	18,1414	22,3139*	27,4461*	33,7587*	41,5233	51,0736*	62,8206	497,912*	**23**
13,2147*	16,3863	20,3190*	25,1956	31,2425*	38,7408	48,0385*	59,5678*	73,8641	634,819*	**24**
14,5519	18,1898*	22,7373*	28,4217	35,5271	44,4089	55,5111*	69,3889	86,7361*	807,793*	**25**
16,0120	20,1751*	25,4207	32,0300*	40,3579	50,8509*	64,0722	80,7310	101,721	1025,92*	**26**
17,6053	22,3587*	28,3956*	36,0624*	45,7993*	58,1652	73,8698	93,8146*	119,144*	1300,50	**27**
19,3428	24,7588	31,6912*	40,5648	51,9229*	66,4613*	85,0705*	108,890	139,379*	1645,50	**28**
21,2361*	27,3946*	35,3391	45,5874*	58,8078*	75,8621	97,8621*	126,242	162,852	2078,21*	**29**
23,2980*	30,2875	39,3737*	51,1858*	66,5416*	86,5041*	112,455	146,192	190,049*	2619,99*	**30**

Пример 2. Каков среднегодовой темп прироста, если сумма вклада удвоилась за а) 10 лет; б) 20 лет; в) 30 лет?

В столбце, соответствующем 10 годам, находим строку, где впервые появляется число, большее 2. Это будет прирост 7,5% годовых. Ему соответствует увеличение суммы вклада в 2,06 раза. Ежегодному приросту в 7% соответствует увеличение вклада за 10 лет в 1,96 раза. Следовательно, интересующий нас среднегодовой прирост равен приблизительно 7,2% в год.

Перейдем теперь к столбцу с заголовком 20 лет. Удвоение вклада произойдет между значениями среднегодового прироста 3,5% (увеличение вклада за 20 лет в 1,99 раза) и 3,6% (увеличение вклада за 20 лет в 2,03 раза). Среднегодовой прирост можно оценить как 3,51%.

Проделываем ту же операцию со столбцом 30 лет. Удвоение суммы вклада происходит при среднегодовом приросте между 2,3% (сумма возрастает за 30 лет в 1,98 раза) и 2,4% (сумма возрастает за 30 лет в 2,04 раза). Среднегодовой прирост можно оценить в соответствии с этими данными в 2,33%.

Пример 3. Ответить на вопрос примера 2, пользуясь таблицами IX.2 и IX.3.

Прологарифмируем формулу сложных процентов (*), где $A_n = 2A$. Получим:

$$\lg 2 = n\lg (1 + \alpha),$$

где $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 30$. Так как $\lg 2 = 0{,}301030$, то $\lg(1 + \alpha_1) = 0{,}0301030$, $\lg(1 + \alpha_2) = 0{,}0150515$, $\lg(1 + \alpha_3) = 0{,}0100343$. Следовательно, с помощью табл. IX.3 найдем:

$$1 + \alpha_1 = 1{,}0718,\ \text{т.е. } \alpha_1 = 7{,}18\%;$$
$$1 + \alpha_2 = 1{,}0350,\ \text{т.е. } \alpha_2 = 3{,}50\%;$$
$$1 + \alpha_3 = 1{,}0233,\ \text{т.е. } \alpha_3 = 2{,}33\%.$$

Таблица IX.2

МАНТИССЫ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
100	000000	0434	0867*	1300*	1733*	2166	2597*	3029	3460*	003891	43	86	130	173	216
101	4321	4751	5180*	5609	6037*	6466	6893*	7320*	7747*	8174	43	86	128	171	214
102	8600	9025*	9450*	9875*	0299*	0723*	1147	1570	1993	012415	42	85	127	170	212
103	012837	3258*	3679*	4100	4520*	4940	5359*	5778*	6197	6615*	42	84	126	168	210
104	7033	7450*	7867*	8284	8700	9116	9531*	9946*	0361	020775	42	83	125	166	208
105	021189	1602*	2015*	2428	2840*	3252	3663*	4074*	4485*	4895*	41	82	124	165	206
106	5305*	5715	6124*	6533	6941*	7349*	7757	8164	8571	8977*	41	82	122	163	204
107	9383*	9789	0194*	0599*	1004	1408	1812	2215*	2618*	033021	40	81	121	162	202
108	033423*	3825*	4227	4628	5029	5429*	5829*	6229*	6628*	7027*	40	80	120	160	200
109	7426	7824*	8222*	8620	9017	9414	9810*	0206*	0602	040997*	40	79	119	159	198
110	041392*	1787	2181*	2575*	2969	3362	3755	4147*	4539*	4931*	39	79	118	157	197
111	5322*	5714	6104*	6495	6885	7274*	7664	8053	8441*	8830	39	78	117	156	195
112	9218	9605*	9992*	0379*	0766	1152*	1538	1923*	2309	052693*	39	77	116	155	193
113	053078	3462*	3846	4229*	4613	4995*	5378	5760	6142	6523*	38	77	115	153	191
114	6904*	7285*	7666	8046	8426	8805	9184*	9563	9941*	060320	38	76	114	152	190
115	060697*	1075	1452	1829	2205*	2581*	2957*	3333	3708*	4083	38	75	113	151	188
116	4457*	4832	5206	5579*	5952*	6325*	6698*	7070*	7442*	7814*	37	75	112	149	186
117	8185*	8556*	8927*	9298	9668	0037*	0407	0776	1145	071513*	37	74	111	148	185
118	071882	2249*	2617	2984*	3351*	3718	4084*	4450*	4816	5181*	37	73	110	147	183
119	5546*	5911*	6276	6640	7004	7367*	7731	8094	8456*	8819	36	73	109	146	182
120	9181	9543	9904	0265*	0626	0987	1347	1707	2066*	082426	36	72	108	144	180
121	082785	3144	3502*	3860*	4218*	4576	4933*	5290*	5647	6003*	36	72	107	143	179
122	6359*	6715*	7071	7426	7781	8136	8490	8844*	9198	9551*	35	71	106	142	177
123	9905	0258	0610*	0963	1315	1666*	2018	2369*	2720*	093071	35	70	106	141	176
124	093421*	3771*	4121*	4471	4820	5169	5518	5866	6214*	6562	35	70	105	140	174

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
125	6910	7257	7604	7951	8297*	8643*	8989*	9335	9680*	100025*	35	69	104	139	173
126	100370*	0715	1059	1403	1747	2090*	2433*	2776*	3119	3461*	34	69	103	137	172
127	3803*	4145*	4487	4828	5169	5510	5850*	6190*	6530*	6870*	34	68	102	136	170
128	7209*	7549	7888	8226*	8565	8903	9240*	9578*	9915*	110252*	34	68	101	135	169
129	110589*	0926	1262*	1598*	1934	2269*	2605	2939*	3274*	3609	34	67	101	134	168
130	3943	4277	4610*	4944	5277*	5610*	5943	6275*	6607*	6939*	33	67	100	133	166
131	7271	7602*	7933*	8264*	8595	8925*	9255*	9585*	9915	120244*	33	66	99	132	165
132	120573*	902*	1231	1559*	1887*	2215*	2543*	2870*	3198	3524*	33	66	98	131	164
133	3851*	4178	4504	4830	5155*	5481	5806	6131	6456	6780*	33	65	98	130	163
134	7104*	7428*	7752*	8076	8399	8722	9045	9367*	9689*	130011*	32	65	97	129	162
135	130333*	0655	0976*	1297*	1618*	1939	2259*	2579*	2899*	3219	32	64	96	128	160
136	3538*	3858	4177	4495*	4814	5132*	5450*	5768*	6086	6403	32	64	95	127	159
137	6720*	7037	7354	7670*	7986*	8302*	8618	8933*	9249	9564	32	63	95	126	158
138	9879	0193*	0508	0822	1136	1449*	1763	2076	2389	142702	31	63	94	126	157
139	143014*	3327	3639	3951	4262*	4574	4885	5196	5507	5817*	31	62	93	125	156
140	6128	6438	6748	7057*	7367	7676	7985	8294	8602*	8910*	31	62	93	124	155
141	9219	9527	9834*	0142	0449	0756	1063	1369*	1676	151982	31	61	92	123	154
142	152288	2594	2899*	3204*	3509*	3814*	4119*	4423*	4728	5032	30	61	91	122	152
143	5336	5639*	5943	6246	6549	6851*	7154	7456*	7758*	8060*	30	61	91	121	151
144	8362	8663*	8965	9266	9567	9867*	0168	0468*	0768*	161068	30	60	90	120	150
145	161368	1667	1966*	2265*	2564	2862*	3161	3459*	3757*	4055	30	60	90	120	149
146	4352*	4650	4947	5244	5541	5837*	6133*	6430	6726	7021*	30	59	89	119	148
147	7317	7612*	7907*	8202*	8497	8792	9086	9380	9674	9968	29	59	88	118	147
148	170261*	0555	0848	1141	1433*	1726	2018*	2310*	2602*	2894*	29	59	88	117	146
149	3186	3477*	3768*	4059*	4350*	4641	4931*	5221*	5511*	5801*	29	58	87	116	145
150	6091	6380*	6669*	6958*	7247*	7536	7824*	8113	8401	8689	29	58	87	116	144
151	8976*	9264	9551*	9838*	0125*	0412*	0699	0985*	1271*	181557*	29	57	86	115	143
152	181843*	2129	2414*	2699*	2984*	3269*	3554*	3839	4123	4407	28	57	85	114	142
153	4691	4975	5258*	5542	5825	6108	6391	6673*	6956	7238*	28	57	85	113	142

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
154	7520*	7802*	8084	8365*	8647	8928	9209	9490	9770*	**19**0051	28	56	84	113	141
155	**19**0331*	0611*	0891*	1171	1451	1730	2009*	2288*	2567	2846	28	56	84	112	140
156	3124*	3402*	3681	3958*	4236*	4514	4791*	5068*	5346	5622*	28	56	83	111	139
157	5899*	6176	6452*	6728*	7004*	7280*	7556	7831*	8106*	8382	28	55	83	110	138
158	8657	8931*	9206	9480*	9755	0029	0303	0576*	0850	**20**1123*	27	55	82	110	137
159	**20**1397	1670	1943	2215*	2488	2760*	3032*	3304*	3576*	3848	27	54	82	109	136
160	4119*	4391	4662*	4933*	5204	5475	5745*	6015*	6286	6556	27	54	81	108	135
161	6825*	7095*	7365	7634	7903*	8172*	8441	8710	8978*	9246*	27	54	81	108	134
162	9515	9783	0050*	0318*	0586	0853	1120*	1387*	1654	**21**1921	27	53	80	107	134
163	**21**2187*	2453*	2720	2986	3252	3517*	3783	4048*	4313*	4578*	27	53	80	106	133
164	4843*	5108*	5373	5637*	5901*	6165*	6429*	6693*	6957	7220*	26	53	79	106	132
165	7483*	7747	8010	8272*	8535*	8797*	9060	9322*	9584*	9846	26	52	79	105	131
166	**22**0108	369*	0631	0892	1153	1414	1674*	1935*	2196	2456	26	52	78	104	130
167	2716	2976	3236	3495*	3755	4014*	4274	4533	4791*	5050*	26	52	78	104	130
168	5309	5567*	5825*	6084	6342	6599*	6857*	7115	7372	7629*	26	52	77	103	129
169	7886*	8143*	8400	8656*	8913	9169*	9425*	9681*	9937*	**23**0193	26	51	77	103	128
170	**23**0448*	0704	0959*	1214*	1469*	1724	1979	2233*	2487*	2742	25	51	76	102	127
171	2996	3250	3503*	3757	4010*	4264	4517	4770	5023	5275*	25	51	76	101	127
172	5528	5780*	6033	6285	6537	6789	7040*	7292	7543*	7794*	25	50	76	101	126
173	8046	8297	8547*	8798*	9049	9299	9549*	9799*	0049*	**24**0299*	25	50	75	100	125
174	**24**0549	0798*	1048	1297	1546	1795	2044	2292*	2541	2789*	25	50	75	100	124
175	3038	3286	3534	3781*	4029*	4277	4524*	4771*	5018*	5265*	25	50	74	99	124
176	5512*	5759	6005*	6252	6498*	6744*	6990*	7236*	7482	7727*	25	49	74	99	123
177	7973	8218*	8463*	8708*	8953*	9198	9442*	9687	9931*	**25**0175*	24	49	73	98	122
178	**25**0420	0663*	0907*	1151	1394*	1638	1881	2124*	2367*	2610	24	49	73	97	122

179	2853	3095*	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4789*	5031	24	48	73	97	121
180	5272*	5513*	5754*	5995*	6236*	6477	6717*	6958	7198	7438*	24	48	72	96	120
181	7678*	7918	8158	8397*	8637	8876*	9115*	9354*	9593*	9832*	24	48	72	96	120
182	**26**0071	0309*	0548	0786*	1024*	1262*	1500*	1738*	1976	2213*	24	48	71	95	119
183	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3872*	4109	4345*	4581*	24	47	71	95	118
184	4817*	5053*	5289*	5525	5760*	5996	6231*	6466*	6701*	6936*	24	47	71	94	118
185	7171*	7406	7640*	7875	8109*	8343*	8577*	8811*	9045*	9279	23	47	70	94	117
186	9512*	9746	9979*	0212*	0445*	0678*	911*	1144	1376*	**27**1609	23	47	70	93	116
187	**27**1841*	2073*	2305*	2537*	2769*	3001	3232*	3464	3695*	3926*	23	46	70	93	116
188	4157*	4388*	4619*	4850	5080*	5311	5541*	5771*	6001*	6231*	23	46	69	92	115
189	6461*	6691*	6921	7150*	7379*	7609	7838	8067	8296	8524*	23	46	69	92	115
190	8753*	8982	9210*	9438*	9666*	9894*	0122*	0350*	0578	**28**0805*	23	46	68	91	114
191	**28**1033	1260*	1487*	1714*	1941*	2168*	2395*	2622	2848*	3074*	23	45	68	91	113
192	3301	3527	3753	3979	4205	4430*	4656	4881*	5107	5332	23	45	68	90	113
193	5557	5782	6007	6231*	6456	6680*	6905	7129*	7353*	7577*	22	45	67	90	112
194	7801*	8025*	8249	8472*	8696	8919*	9142*	9365*	9588*	9811*	22	45	67	89	112
195	**29**0034*	257	479*	702	924*	1146*	1368*	1590*	1812*	2034	22	44	67	89	111
196	2256	2477*	2699	2920	3141	3362*	3583*	3804	4025	4245*	22	44	66	88	111
197	4466	4686*	4906*	5127	5347	5567	5786*	6006*	6226	6445*	22	44	66	88	110
198	6665	6884	7103*	7322*	7541*	7760*	7979	8197*	8416	8634*	22	44	66	88	109
199	8853	9071	9289	9507	9725	9942*	0160*	0378	0595	**30**0812*	22	44	65	87	109
200	**30**1029*	1247	1464	1680*	1897*	2114	2330*	2547	2763*	2979*	22	43	65	87	108
201	3196	3412	3627*	3843*	4059	4275	4490*	4705*	4921	5136	22	43	65	86	108
202	5351	5566	5781	5995*	6210*	6425	6639	6853*	7067*	7282	21	43	64	86	107
203	7496	7709*	7923*	8137	8350*	8564	8777*	8991	9204	9417	21	43	64	85	107
204	9630	9843	0055*	00268	0480*	0693	0905*	1117*	1329*	**31**1541*	21	42	64	85	106
205	**31**1753*	1965*	2177	2388*	2600	2811*	3023	3234	3445	3656	21	42	63	85	106
206	3867	4077*	4288*	4499	4709*	4920	5130	5340	5550*	5760	21	42	63	84	105
207	5970	6180	6389*	6599	6808*	7018	7227	7436	7645*	7854	21	42	63	84	105
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
208	8063	8272	8480*	8689	8897*	9106	9314	9522	9730	9938	21	42	63	83	104
209	**32**0146	0354	0561*	0769	0976*	1184	1391	1598	1805	2012	21	41	62	83	104
210	2219	2426	2632*	2839	3045*	3252	3458	3664*	3870*	4076*	21	41	62	83	103
211	4282	4488	4693*	4899	5104*	5310	5515*	5720*	5925*	6130*	21	41	62	82	103
212	6335*	6540*	6745	6949*	7154*	7358*	7563	7767	7971*	8175*	20	41	61	82	102
213	8379*	8583	8787	8990*	9194	9397*	9601	9804*	0007*	**33**0210*	20	41	61	81	102
214	**33**0413*	0616*	0819	1022	1224*	1427	1629*	1832	2034	2236	20	41	61	81	101
215	2438	2640	2842	3044	3245*	3447	3648*	3850	4051	4252*	20	40	60	81	101
216	4453*	4654*	4855*	5056*	5257	5457*	5658	5858*	6059	6259*	20	40	60	80	100
217	6459*	6659*	6859*	7059*	7259*	7459	7658*	7858	8057*	8257	20	40	60	80	100
218	8456	8655*	8854*	9053*	9252*	9451	9650	9848*	0047	**34**0245*	20	40	60	80	99
219	**34**0444	642	840*	1038*	1236*	1434*	1632	1830	2027*	2225	20	40	59	79	99
220	2422*	2620	2817	3014	3211*	3408*	3605*	3802	3999	4195*	20	39	59	79	99
221	4392	4588*	4785	4981	5177*	5373*	5569*	5765*	5961*	6157	20	39	59	78	98
222	6352*	6548*	6744	6939	7134*	7330	7525	7720	7915	8110	20	39	59	78	98
223	8304*	8499*	8694	8888*	9083	9277*	9471*	9665*	9860	**35**0054	19	39	58	78	97
224	**35**0248	0441*	0635*	0829	1022*	1216	1409*	1603	1796	1989	19	39	58	77	97
225	2182*	2375	2568	2761	2953*	3146*	3339	3531*	3723*	3916	19	39	58	77	96
226	4108	4300*	4492*	4684*	4876	5068	5259*	5451*	5643	5834	19	38	58	77	96
227	6025*	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7553*	7744	19	38	57	76	95
228	7934*	8125	8315*	8505*	8696	8886	9076	9266	9456	9645*	19	38	57	76	95
229	9835	0025	0214*	0404	0593	0782*	0971*	1160*	1350	**36**1538*	19	38	57	76	95
230	**36**1727*	1916*	2105	2293*	2482	2670*	2859	3047*	3235*	3423*	19	38	57	75	94
231	3611*	3799*	3987*	4175*	4363	4550*	4738*	4926	5113	5300*	19	38	56	75	94

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
232	5487*	5675	5862	6049	6236	6422*	6609*	6796	6982*	7169	19	37	56	75	93
233	7355*	7542	7728*	7914*	8100*	8286*	8472*	8658*	8844*	9030	19	37	56	74	93
234	9215*	9401	9586*	9772	9957*	0142*	0328	0513	0698	**37**0883	19	37	56	74	93
235	**37**1067*	1252*	1437	1621*	1806	1990*	2175	2359*	2543*	2727*	18	37	55	74	92
236	2912	3095*	3279*	3463*	3647	3831	4014*	4198	4381*	4565	18	37	55	74	92
237	4748	4931*	5114*	5297*	5480*	5663*	5846	6029	6211*	6394	18	37	55	73	91
238	6576*	6759	6941*	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	18	36	55	73	91
239	8397*	8579*	8761	8942*	9124	9305*	9486*	9668	9849	**38**0030	18	36	54	73	91
240	**38**0211	0392	0573	0753*	0934	1115	1295*	1476	1656	1836*	18	36	54	72	90
241	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3096*	3276*	3456	3635*	18	36	54	72	90
242	3815	3994*	4174	4353	4532*	4711*	4890*	5069*	5248*	5427*	18	36	54	72	90
243	5606	5784*	5963*	6142	6320*	6498*	6677	6855*	7033*	7211*	18	36	54	71	89
244	7389	7567*	7745*	7923	8101	8278*	8456	8633*	8811	8988*	18	36	53	71	89
245	9166	9343	9520	9697*	9874*	0051	0228	0405	0581*	**39**0758*	18	35	53	71	88
246	**39**0935	1111*	1288	1464	1640*	1816*	1993	2169	2345	2521	18	35	53	71	88
247	2696*	2872*	3048	3224	3399*	3575	3750*	3926	4101	4276*	18	35	53	70	88
248	4451*	4626*	4801*	4976*	5151*	5326	5501	5675*	5850	6024*	17	35	52	70	87
249	6199	6373*	6548	6722	6896	7070*	7244*	7418*	7592	7766	17	35	52	70	87
250	7940	8113*	8287	8460*	8634	8807*	8981	9154	9327*	9500*	17	35	52	69	87
251	9673*	9846*	0019*	0192	0365	0537*	0710*	0883	1055*	**40**1228	17	35	52	69	86
252	**40**1400*	1572*	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2948*	17	34	52	69	86
253	3120*	3292	3463*	3635	3806*	3977*	4149	4320	4491*	4662*	17	34	51	69	86
254	4833*	5004*	5175*	5346	5517	5687*	5858	6028*	6199	6369*	17	34	51	68	85
255	6540	6710	6880*	7050*	7220*	7390*	7560*	7730*	7900*	8070	17	34	51	68	85
256	8239*	8409*	8579	8748*	8918	9087	9256*	9425*	9595	9764	17	34	51	68	85
257	9933	0102	0270*	0439*	0608*	0777	0945*	1114	1282*	**41**1451	17	34	51	68	84
258	**41**1619*	1788	1956	2124	2292*	2460*	2628*	2796	2964	3132	17	34	50	67	84
259	3299*	3467	3634*	3802*	3969*	4137	4304*	4471*	4639	4806	17	33	50	67	84

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
260	4973	5140	5307	5474	5640*	5807*	5974	6141	6307*	6474	17	33	50	67	83
261	6640*	6806*	6973	7139	7305*	7471*	7637*	7803*	7969*	8135	17	33	50	66	83
262	8301	8467	8632*	8798	8963*	9129	9294*	9460	9625	9790*	17	33	50	66	83
263	9955*	0120*	0285*	0450*	0615*	0780*	0945	1110	1274*	**42**1439	16	33	49	66	82
264	**42**1603*	1768	1932*	2097	2261	2425*	2589*	2753*	2917*	3081*	16	33	49	66	82
265	3245*	3409*	3573*	3737	3900*	4064*	4228	4391*	4554*	4718	16	33	49	65	82
266	4881*	5044*	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6185*	6348*	16	33	49	65	81
267	6511	6673*	6836	6998*	7161	7323*	7486	7648	7810*	7972*	16	32	49	65	81
268	8134*	8296*	8458*	8620*	8782*	8944	9106	9267*	9429	9590*	16	32	49	65	81
269	9752	9913*	0075	0236	0397*	0558*	0719*	0880*	1041*	**43**1202*	16	32	48	64	81
270	**43**1363*	1524*	1685	1846	2006*	2167	2327*	2488	2648*	2809	16	32	48	64	80
271	2969	3129*	3289*	3449*	3609*	3769*	3929*	4089*	4249	4409	16	32	48	64	80
272	4568*	4728*	4888	5047*	5207	5366*	5525*	5685	5844	6003*	16	32	48	64	80
273	6162*	6321*	6480*	6639*	6798*	6957	7116	7274*	7433	7592	16	32	48	64	79
274	7750*	7909	8067	8225*	8384	8542	8700*	8858*	9016*	9174*	16	32	47	63	79
275	9332*	9490*	9648	9806	9963*	0121*	0279	0436*	0594	**44**0751*	16	32	47	63	79
276	**44**0909	1066	1223*	1380*	1538	1695	1852	2009	2166	2322*	16	31	47	63	79
277	2479	2636*	2793	2949*	3106	3262*	3419	3575*	3732	3888*	16	31	47	63	78
278	4044*	4200*	4357	4513	4669	4825	4981	5136*	5292*	5448*	16	31	47	62	78
279	5604	5759*	5915	6070*	6226	6381*	6537	6692	6847*	7002*	16	31	47	62	78
280	7158	7313	7468	7623	7778	7932*	8087*	8242	8397	8551*	15	31	46	62	77
281	8706	8860*	9015	9169*	9324	9478	9632*	9786*	9940*	**45**0095	15	31	46	62	77
282	**45**0249	0403	0557	0710*	0864*	1018	1172	1325*	1479	1632*	15	31	46	62	77
283	1786	1939*	2093	2246*	2399*	2553	2706	2859	3012	3165	15	31	46	61	77

284	3318	3471	3624	3776*	3929*	4082	4234*	4387	4539*	4692	15	31	46	61	76
285	4844*	4997	5149*	5301*	5453*	5606	5758	5910	6062	6214	15	30	46	61	76
286	6366	6517*	6669*	6821	6973	7124*	7276	7427*	7579	7730*	15	30	45	61	76
287	7881*	8033	8184	8335*	8486*	8637*	8788*	8939*	9090*	9241*	15	30	45	60	76
288	9392	9543	9693*	9844*	9995	0145*	0296	0446*	0597	460747*	15	30	45	60	75
289	460897*	1048	1198	1348	1498*	1648*	1798*	1948	2098	2248	15	30	45	60	75
290	2397*	2547*	2697	2847	2996*	3146	3295*	3445	3594	3743*	15	30	45	60	75
291	3892*	4042	4191	4340	4489*	4638*	4787*	4936	5085	5234	15	30	45	60	75
292	5382*	5531*	5680	5828*	5977	6125*	6274	6422*	6571	6719	15	30	45	59	74
293	6867*	7015*	7163*	7312	7460	7608	7756	7903*	8051*	8199*	15	30	44	59	74
294	8347	8495	8642*	8790	8937*	9085	9232*	9380	9527	9674*	15	29	44	59	74
295	9822	9969	0116	0263	0410	0557	0704	0851	0998	471144*	15	29	44	59	73
296	471291*	1438	1585	1731*	1878	2024*	2171	2317*	2463*	2610	15	29	44	59	73
297	2756	2902*	3048*	3194*	3340*	3486*	3632*	3778*	3924*	4070*	15	29	44	58	73
298	4216	4361*	4507*	4653	4798*	4944	5089*	5235	5380*	5525*	15	29	44	58	73
299	5671	5816	5961*	6106*	6251*	6396*	6541*	6686*	6831*	6976	15	29	44	58	73
300	7121	7265*	7410*	7555	7699*	7844	7988*	8133	8277*	8422	14	29	43	58	72
301	8566	8710*	8854*	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	14	29	43	58	72
302	480006*	0150*	0294	0438	0581*	0725	0868*	1012	1155*	1299	14	29	43	57	72
303	1442*	1585*	1729	1872	2015*	2158*	2301*	2444*	2587*	2730*	14	29	43	57	72
304	2873*	3016	3159	3301*	3444*	3587	3729*	3872	4014*	4157	14	29	43	57	71
305	4299*	4442	4584*	4726*	4869	5011	5153	5295	5437	5579	14	28	43	57	71
306	5721	5863	6005	6146*	6288*	6430	6572	6713*	6855	6996*	14	28	43	57	71
307	7138	7279*	7421	7562*	7703*	7845	7986	8127	8268*	8409*	14	28	42	57	71
308	8550*	8691*	8832*	8973*	9114	9255	9395*	9536*	9677	9817*	14	28	42	56	70
309	9958	0099	0239	0379*	0520	0660*	0800*	0941	1081	491221*	14	28	42	56	70
310	491361*	1501*	1641*	1781*	1921*	2061*	2201	2341	2481	2620*	14	28	42	56	70
311	2760	2900	3039*	3179	3318*	3458	3597	3736*	3876	4015	14	28	42	56	70
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
312	4154*	4293*	4432*	4571*	4711	4850	4988*	5127*	5266*	5405*	14	28	42	56	69
313	5544	5683	5821*	5960	6098*	6237*	6376	6514*	6652*	6791	14	28	42	55	69
314	6929*	7067*	7206	7344	7482*	7620*	7758*	7896*	8034*	8172*	14	28	41	55	69
315	8310*	8448	8586	8723*	8861*	8999	9136*	9274*	9412	9549*	14	28	41	55	69
316	9687	9824	9961*	0099	0236	0373*	0510*	0648	0785	**50**0922	14	27	41	55	69
317	**50**1059	1196	1333	1470	1606*	1743*	1880	2017	2153*	2290*	14	27	41	55	68
318	2427	2563*	2700	2836*	2973	3109	3245*	3382	3518	3654*	14	27	41	55	68
319	3790*	3926*	4062*	4198*	4334*	4470*	4606*	4742*	4878	5014	14	27	41	54	68
320	5149*	5285*	5421	5556*	5692*	5828	5963*	6098*	6234	6369*	14	27	41	54	68
321	6505	6640	6775*	6910*	7045*	7180*	7316	7451	7586	7720*	14	27	41	54	68
322	7855*	7990*	8125*	8260	8395	8529*	8664	8798*	8933*	9068	13	27	40	54	67
323	9202*	9336*	9471	9605*	9740	9874	0008*	0142*	0276*	**51**0410*	13	27	40	54	67
324	**51**0545	0679	0813	0946*	1080*	1214*	1348*	1482	1616	1749*	13	27	40	54	67
325	1883	2016*	2150*	2284	2417*	2550*	2684	2817*	2951	3084	13	27	40	53	67
326	3217*	3350*	3483*	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4414*	13	27	40	53	67
327	4547*	4680*	4813	4946	5078*	5211	5343*	5476	5608*	5741	13	27	40	53	66
328	5873*	6006	6138*	6270*	6403	6535	6667*	6799*	6931*	7063*	13	26	40	53	66
329	7195*	7327*	7459*	7591*	7723*	7855	7987	8118*	8250*	8382	13	26	40	53	66
330	8513*	8645*	8777	8908*	9040	9171	9302*	9434	9565*	9696*	13	26	39	53	66
331	9827*	9959	0090	0221	0352*	0483*	0614*	0745	0876	**52**1007	13	26	39	52	66
332	**52**1138	1268*	1399*	1530	1661	1791*	1922	2052*	2183	2313*	13	26	39	52	65
333	2444	2574*	2704*	2835	2965*	3095*	3226	3356	3486	3616	13	26	39	52	65
334	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4525*	4655*	4785	4915	13	26	39	52	65
335	5044*	5174	5304	5433*	5563	5692*	5821*	5951	6080*	6210	13	26	39	52	65

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
336	6339	6468*	6597*	6726*	6855*	6985	7114	7243	7372	7501	13	26	39	52	65
337	7629*	7758*	7887*	8016	8145	8273*	8402	8531	8659*	8788	13	26	39	51	64
338	8916*	9045	9173*	9301*	9430	9558*	9686*	9815	9943	**53**0071*	13	26	38	51	64
339	**53**0199*	0327*	0455*	0583*	0711*	0839*	0967*	1095*	1223	1351	13	26	38	51	64
340	1478*	1606*	1734	1861*	1989*	2117	2244*	2372	2499*	2627	13	26	38	51	64
341	2754	2881*	3009	3136	3263*	3390*	3517*	3644*	3772	3899	13	25	38	51	64
342	4026	4153	4280	4406*	4533*	4660*	4787	4914	5040*	5167	13	25	38	51	63
343	5294	5420*	5547	5673*	5800	5926*	6053	6179*	6305*	6432	13	25	38	51	63
344	6558	6684*	6810*	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	13	25	38	50	63
345	7819	7944*	8070*	8196*	8322	8448	8573*	8699	8824*	8950*	13	25	38	50	63
346	9076	9201*	9327	9452	9577*	9703	9828*	9953*	0079	**54**0204	13	25	38	50	63
347	**54**0329	0454*	0579*	0704*	0829*	0954*	1079*	1204*	1329*	1454	12	25	37	50	62
348	1579	1704	1828*	1953	2078	2202*	2327	2451*	2576	2700*	12	25	37	50	62
349	2825	2949*	3074	3198*	3322*	3447	3571	3695*	3819*	3943*	12	25	37	50	62
350	4068	4192	4316	4440	4564	4688	4811*	4935*	5059*	5183	12	25	37	50	62
351	5307	5430*	5554*	5678	5801*	5925	6048*	6172	6295*	6419	12	25	37	49	62
352	6542*	6666	6789	6912*	7035*	7159	7282	7405	7528*	7651*	12	25	37	49	62
353	7774*	7897*	8020*	8143*	8266*	8389	8512	8635	8757*	8880*	12	25	37	49	61
354	9003	9125*	9248*	9371	9493*	9616	9738*	9861	9983*	**55**0105*	12	25	37	49	61
355	**55**0228	0350*	0472*	0595	0717	0839*	0961*	1083*	1205*	1327*	12	24	37	49	61
356	1449*	1571*	1693*	1815*	1937*	2059*	2181	2303	2424*	2546*	12	24	37	49	61
357	2668	2789*	2911	3033	3154*	3276	3397*	3518*	3640	3761*	12	24	36	49	61
358	3883	4004	4125*	4246*	4368	4489	4610	4731	4852	4973	12	24	36	48	61
359	5094	5215	5336	5457	5578	5698*	5819*	5940	6061	6181*	12	24	36	48	60
360	6302*	6423	6543*	6664	6784*	6905	7025*	7146	7266*	7386*	12	24	36	48	60
361	7507	7627	7747*	7867*	7988	8108	8228	8348*	8468*	8588*	12	24	36	48	60
362	8708*	8828*	8948	9068	9188	9308	9427*	9547*	9667	9786*	12	24	36	48	60
363	9906*	0026	0145*	0265	0384*	0504	0623*	0743	0862*	**56**0982	12	24	36	48	60

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
364	**56**1101	1220*	1339*	1459	1578	1697*	1816*	1935*	2054*	2173*	12	24	36	48	60
365	2292*	2411*	2530*	2649*	2768*	2887	3006	3124*	3243*	3362	12	24	36	48	59
366	3481	3599*	3718	3836*	3955	4073*	4192	4310*	4429	4547*	12	24	36	47	59
367	4666	4784	4902*	5020*	5139	5257	5375*	5493*	5611*	5729*	12	24	35	47	59
368	5847*	5965*	6083*	6201*	6319*	6437	6555	6673	6790*	6908*	12	24	35	47	59
369	7026	7144	7261*	7379	7496*	7614	7731*	7849	7966*	8084	12	24	35	47	59
370	8201*	8319	8436	8553*	8670*	8788	8905	9022*	9139*	9256*	12	23	35	47	59
371	9373*	9490*	9607*	9724*	9841*	9958*	0075*	0192*	0309	**57**0426	12	23	35	47	58
372	**57**0542*	0659*	0776	0893	1009*	1126	1242*	1359	1475*	1592	12	23	35	47	58
373	1708*	1825	1941*	2057*	2174	2290*	2406*	2523	2639	2755	12	23	35	47	58
374	2871*	2987*	3103*	3219*	3335*	3451*	3567*	3683*	3799*	3915	12	23	35	46	58
375	4031	4147	4262*	4378*	4494	4609*	4725*	4841	4956*	5072	12	23	35	46	58
376	5187*	5303	5418*	5534	5649*	5764*	5880	5995*	6110*	6226	12	23	35	46	58
377	6341	6456*	6571*	6686*	6801*	6916*	7031*	7146*	7261*	7376*	12	23	35	46	58
378	7491*	7606*	7721*	7836	7951	8065*	8180*	8295	8409*	8524*	11	23	34	46	57
379	8639	8753*	8868	8982*	9097	9211*	9326	9440*	9554*	9669	11	23	34	46	57
380	9783*	9897*	0012	0126	0240*	0354*	0468*	0582*	0696*	**58**0810*	11	23	34	46	57
381	**58**0924*	1038*	1152*	1266*	1380*	1494*	1608	1722	1835*	1949*	11	23	34	46	57
382	2063	2177	2290*	2404	2517*	2631	2744*	2858	2971*	3085	11	23	34	45	57
383	3198*	3312	3425*	3538*	3652	3765	3878*	3991*	4104*	4218	11	23	34	45	57
384	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5347*	11	23	34	45	56
385	5460*	5573*	5686	5799	5911*	6024	6137	6249*	6362	6474*	11	23	34	45	56
386	6587	6699*	6812	6924*	7037	7149	7261*	7374	7486	7598*	11	22	34	45	56
387	7710*	7823	7935	8047	8159*	8271*	8383*	8495*	8607*	8719*	11	22	34	45	56

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
388	8831*	8943*	9055*	9167	9279	9391	9502*	9614*	9726	9837*	11	22	34	45	56
389	9949*	0061	0172*	0284	0395*	0507	0618*	0730	0841*	**59**0953	11	22	33	45	56
390	**59**1064*	1175*	1287	1398*	1509*	1621	1732	1843	1954*	2065*	11	22	33	45	56
391	2176*	2287*	2398*	2509*	2620*	2731*	2842*	2953*	3064	3175	11	22	33	44	55
392	3286	3396*	3507*	3618	3728*	3839*	3950	4060*	4171	4282	11	22	33	44	55
393	4392*	4503	4613*	4723*	4834	4944*	5055	5165	5275*	5385*	11	22	33	44	55
394	5496	5606	5716*	5826*	5936*	6047	6157	6267	6377	6487	11	22	33	44	55
395	6597	6707	6816*	6926*	7036*	7146	7256	7366	7475*	7585*	11	22	33	44	55
396	7695	7804*	7914	8024	8133*	8243	8352*	8462	8571*	8681	11	22	33	44	55
397	8790*	8899*	9009	9118*	9227*	9337	9446	9555*	9664*	9773*	11	22	33	44	55
398	9883	9992	0101	0210	0319	0428	0537	0646	0755	**60**0864	11	22	33	44	54
399	**60**0972*	1081*	1190*	1299	1408	1516*	1625	1734	1842*	1951	11	22	33	44	54
400	2059*	2168*	2277	2385*	2494	2602*	2710*	2819	2927*	3036	11	22	33	43	54
401	3144	3252*	3360*	3469	3577	3685*	3793*	3901*	4009*	4118	11	22	32	43	54
402	4226	4334	4442	4550	4657*	4765*	4873*	4981*	5089	5197	11	22	32	43	54
403	5305	5412*	5520*	5628	5735*	5843*	5951	6058*	6166	6273*	11	22	32	43	54
404	6381	6488*	6596	6703*	6811	6918*	7025*	7133	7240*	7347*	11	21	32	43	54
405	7455	7562	7669	7776*	7883*	7990*	8097*	8205	8312	8419	11	21	32	43	54
406	8526	8632*	8739*	8846*	8953*	9060*	9167	9274	9380*	9487*	11	21	32	43	53
407	9594	9701	9807*	9914	0021	0127*	0234	0340*	0447	**61**0553*	11	21	32	43	53
408	**61**0660	0766*	0873	0979	1085*	1192	1298	1404*	1510*	1617	11	21	32	43	53
409	1723	1829	1935*	2041*	2147*	2253*	2359*	2465*	2571*	2677*	11	21	32	42	53
410	2783*	2889*	2995*	3101*	3207	3313	3418*	3524*	3630	3736	11	21	32	42	53
411	3841*	3947	4053	4158*	4264	4369*	4475	4580*	4686	4791*	11	21	32	42	53
412	4897	5002*	5107*	5213	5318*	5423*	5529	5634	5739*	5844*	11	21	32	42	53
413	5950	6055	6160	6265	6370	6475*	6580*	6685*	6790	6895	11	21	32	42	53
414	7000	7105	7210	7314*	7419*	7524*	7629	7734	7838*	7943	10	21	31	42	52
415	8048	8152*	8257	8361*	8466	8571	8675*	8780	8884	8988*	10	21	31	42	52

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
416	9093	9197*	9302	9406	9510*	9615	9719	9823*	9927*	**62**0031*	10	21	31	42	52
417	**62**0136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072	10	21	31	42	52
418	1176	1280	1384	1487*	1591*	1695	1799	1902*	2006*	2110	10	21	31	42	52
419	2214	2317*	2421	2524*	2628	2731*	2835	2938*	3042	3145*	10	21	31	41	52
420	3249	3352*	3456	3559	3662*	3766	3869	3972*	4075*	4178*	10	21	31	41	52
421	4282	4385	4488	4591	4694*	4797*	4900*	5003*	5106*	5209*	10	21	31	41	52
422	5312	5415	5518	5621	5723*	5826*	5929	6032	6134*	6237*	10	21	31	41	51
423	6340	6443	6545*	6648	6750*	6853	6955*	7058	7160*	7263	10	21	31	41	51
424	7365*	7468	7570*	7673	7775	7877*	7979*	8082	8184*	8286*	10	20	31	41	51
425	8388*	8491	8593	8695	8797	8899*	9001*	9103*	9205*	9307*	10	20	31	41	51
426	9409*	9511*	9613	9715	9817	9919	0020*	0122*	0224	**63**0326	10	20	31	41	51
427	**63**0427*	0529*	0631	0732*	0834*	0936	1037*	1139	1240*	1342	10	20	30	41	51
428	1443*	1545	1646*	1748	1849	1950*	2052	2153	2254*	2356	10	20	30	41	51
429	2457	2558*	2659*	2760*	2862	2963	3064	3165	3266	3367	10	20	30	40	51
430	3468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4174*	4275*	4376	10	20	30	40	50
431	4477	4578	4678*	4779	4880	4980*	5081	5182	5282*	5383	10	20	30	40	50
432	5483*	5584	5684*	5785	5885*	5986	6086*	6186*	6287	6387*	10	20	30	40	50
433	6487*	6588	6688	6788*	6888*	6989	7089	7189	7289*	7389*	10	20	30	40	50
434	7489*	7589*	7689*	7789*	7889*	7989*	8089*	8189*	8289*	8389	10	20	30	40	50
435	8489	8589	8688*	8788*	8888	8988	9087*	9187*	9287	9386*	10	20	30	40	50
436	9486	9586	9685*	9785	9884*	9984	0083*	0183	0282*	**64**0382	10	20	30	40	50
437	**64**0481	0580*	0680	0779	0878*	0978	1077	1176*	1275*	1374*	10	20	30	40	50
438	1474	1573	1672	1771	1870*	1969*	2068*	2167*	2266*	2365*	10	20	30	40	50
439	2464*	2563	2662	2761	2860	2958*	3057*	3156	3255	3353*	10	20	30	40	49

440	3452*	3551	3650	3748*	3847	3945*	4044	4143	4241*	4340	10	20	30	39	49
441	4438*	4537	4635*	4733*	4832	4930*	5029	5127	5225*	5324	10	20	30	39	49
442	5422	5520*	5618*	5716*	5815	5913	6011	6109*	6207*	6305*	10	20	29	39	49
443	6403*	6501*	6599*	6697*	6795*	6893*	6991*	7089	7187	7285	10	20	29	39	49
444	7382*	7480*	7578*	7676	7774	7871*	7969	8067	8164*	8262	10	20	29	39	49
445	8360	8457*	8555	8652*	8750	8847*	8945	9042*	9140	9237	10	19	29	39	49
446	9334*	9432	9529*	9626*	9724	9821	9918*	0015*	0113	**65**0210	10	19	29	39	49
447	**65**0307*	0404*	0501*	0598*	0695*	0793	0890	0987	1084	1181	10	19	29	39	49
448	1278	1374*	1471*	1568*	1665*	1762	1859	1956	2052*	2149*	10	19	29	39	48
449	2246	2343	2439*	2536	2633	2729*	2826	2922*	3019	3115*	10	19	29	39	48
450	3212*	3309	3405	3501*	3598	3694*	3791	3887*	3983*	4080	10	19	29	39	48
451	4176*	4272*	4369	4465	4561*	4657*	4753*	4850	4946	5042	10	19	29	38	48
452	5138	5234*	5330*	5426*	5522*	5618*	5714*	5810	5906	6002	10	19	29	38	48
453	6098	6194	6289*	6385*	6481*	6577	6673	6768*	6864	6960	10	19	29	38	48
454	7055*	7151*	7247	7342*	7438	7533*	7629	7724*	7820	7915*	10	19	29	38	48
455	8011	8106*	8202	8297*	8393	8488	8583*	8679	8774	8869*	10	19	29	38	48
456	8964*	9060	9155	9250	9345*	9440*	9535*	9631	9726	9821	10	19	29	38	48
457	9916	0011	0106	0201	0296	0391	0486	0580*	0675*	**66**0770*	9	19	28	38	47
458	**66**0865	0960	1055	1149*	1244*	1339	1434	1528*	1623	1718	9	19	28	38	47
459	1812*	1907	2001*	2096	2190*	2285*	2380	2474*	2568*	2663	9	19	28	38	47
460	2757*	2852	2946*	3040*	3135	3229*	3323*	3418	3512	3606*	9	19	28	38	47
461	3700*	3795	3889	3983	4077*	4171*	4265*	4359*	4453*	4547*	9	19	28	38	47
462	4641*	4735*	4829*	4923*	5017*	5111*	5205*	5299	5393	5487	9	19	28	38	47
463	5580*	5674*	5768*	5862	5956	6049*	6143	6237	6330*	6424	9	19	28	37	47
464	6517*	6611*	6705	6798*	6892	6985*	7079	7172*	7266	7359*	9	19	28	37	47
465	7452*	7546	7639*	7733	7826	7919*	8012*	8106	8199	8292*	9	19	28	37	47
466	8385*	8479	8572	8665	8758*	8851*	8944*	9037*	9130*	9223*	9	19	28	37	47
467	9316*	9409*	9502*	9595*	9688*	9781*	9874*	9967	0060	**67**0153	9	19	28	37	46
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
468	**67**0245*	0338*	0431	0524	0616*	0709*	0802	0894*	0987*	1080	9	19	28	37	46
469	1172*	1265	1358	1450*	1543	1635*	1728	1820*	1913	2005	9	19	28	37	46
470	2097*	2190	2282*	2374*	2467	2559*	2651*	2744	2836	2928*	9	18	28	37	46
471	3020*	3113	3205	3297	3389*	3481*	3573*	3665*	3757*	3849*	9	18	28	37	46
472	3941*	4034	4125*	4217*	4309*	4401*	4493*	4585*	4677	4769	9	18	28	37	46
473	4861	4952*	5044*	5136*	5228	5319*	5411*	5503	5595	5686*	9	18	28	37	46
474	5778	5869*	5961*	6053	6144*	6236	6327*	6419	6510*	6602	9	18	27	37	46
475	6693*	6785	6876	6967*	7059	7150*	7241*	7333	7424	7515*	9	18	27	37	46
476	7606*	7698	7789	7880*	7971*	8062*	8154	8245	8336	8427	9	18	27	36	46
477	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	9	18	27	36	45
478	9427*	9518*	9609*	9700	9791	9881*	9972*	0063	0154	**68**0244*	9	18	27	36	45
479	**68**0335*	0426	0516*	0607	0698	0788*	0879	0969*	1060	1150*	9	18	27	36	45
480	1241	1331*	1422	1512*	1602*	1693	1783*	1874	1964	2054*	9	18	27	36	45
481	2145	2235	2325*	2415*	2506	2596	2686	2776*	2866*	2956*	9	18	27	36	45
482	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	9	18	27	36	45
483	3947	4037	4126*	4216*	4306*	4396	4486	4576	4665*	4755*	9	18	27	36	45
484	4845	4935	5024*	5114	5204	5293*	5383	5473	5562*	5652	9	18	27	36	45
485	5741*	5831	5920*	6010	6099*	6189	6278*	6368	6457*	6546*	9	18	27	36	45
486	6636	6725*	6814*	6904	6993*	7082*	7172	7261	7350*	7439*	9	18	27	36	45
487	7528*	7618	7707	7796	7885*	7974*	8063*	8152*	8241*	8330*	9	18	27	36	45
488	8419*	8508*	8597*	8686*	8775*	8864*	8953	9042	9131	9220	9	18	27	36	44
489	9308*	9397*	9486	9575	9663*	9752*	9841	9930	0018*	**69**0107	9	18	27	35	44
490	**69**0196	0284*	0373	0461*	0550	0639	0727*	0816	0904*	0993	9	18	27	35	44
491	1081	1169*	1258	1346*	1435	1523*	1611*	1700	1788*	1876*	9	18	27	35	44

492	1965	2053	2141*	2229*	2318	2406	2494	2582*	2670*	2758*	9	18	26	35	44
493	2846*	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	9	18	26	35	44
494	3726*	3814*	3902*	3990*	4078	4166	4254	4341*	4429*	4517	9	18	26	35	44
495	4605	4692*	4780*	4868	4956	5043*	5131	5218*	5306*	5394	9	18	26	35	44
496	5481*	5569	5656*	5744	5831*	5919	6006*	6094	6181*	6268*	9	17	26	35	44
497	6356	6443*	6531	6618	6705*	6793	6880	6967*	7054*	7142	9	17	26	35	44
498	7229	7316*	7403*	7490*	7578	7665	7752	7839	7926	8013*	9	17	26	35	44
499	8100*	8187*	8274*	8361*	8448*	8535	8622	8709	8796	8883	9	17	26	35	43
500	8970	9056*	9143*	9230*	9317	9404	9490*	9577*	9664	9751	9	17	26	35	43
501	9837*	9924	0011	0097*	0184	0270*	0357*	0444	0530*	**70**0617	9	17	26	35	43
502	**70**0703*	0790	0876*	0963	1049*	1136	1222	1308*	1395	1481*	9	17	26	35	43
503	1567*	1654	1740*	1826*	1913	1999	2085*	2171*	2258	2344	9	17	26	35	43
504	2430*	2516*	2602*	2688*	2775	2861	2947	3033	3119	3205	9	17	26	34	43
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3892*	3978*	4064*	9	17	26	34	43
506	4150*	4236	4322	4407*	4493*	4579	4665	4750*	4836*	4922	9	17	26	34	43
507	5007*	5093*	5179	5264*	5350	5436	5521*	5607	5692*	5778	9	17	26	34	43
508	5863*	5949	6034*	6120	6205*	6290*	6376	6461*	6547	6632	9	17	26	34	43
509	6717*	6803	6888	6973*	7058*	7144	7229	7314*	7399*	7485	9	17	26	34	43
510	7570	7655	7740	7825*	7910*	7995*	8080*	8165*	8250*	8335*	9	17	26	34	43
511	8420*	8505*	8590*	8675*	8760*	8845*	8930*	9015	9100	9185	8	17	25	34	42
512	9269*	9354*	9439*	9524	9609	9693*	9778*	9863	9948	**71**0032*	8	17	25	34	42
513	**71**0117	0202	0286*	0371	0455*	0540	0625	0709*	0794	0878*	8	17	25	34	42
514	0963	1047*	1132	1216*	1300*	1385	1469*	1554	1638*	1722*	8	17	25	34	42
515	1807	1891*	1975*	2060	2144	2228*	2312*	2397	2481	2565*	8	17	25	34	42
516	2649*	2733*	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3322*	3406*	8	17	25	34	42
517	3490*	3574*	3658*	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4245*	8	17	25	34	42
518	4329*	4413*	4497	4581	4664*	4748*	4832*	4916	4999*	5083*	8	17	25	34	42
519	5167	5251	5334*	5418	5501*	5585*	5669	5752*	5836	5919*	8	17	25	33	42
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
520	6003	6086*	6170	6253*	6337	6420*	6504	6587*	6670*	6754	8	17	25	33	42
521	6837*	6921	7004	7087*	7171	7254	7337*	7420*	7504	7587	8	17	25	33	42
522	7670*	7753*	7836*	7920	8003	8086	8169	8252*	8335*	8418*	8	17	25	33	42
523	8501*	8584*	8667*	8750*	8833*	8916*	8999*	9082*	9165	9248	8	17	25	33	41
524	9331	9414	9497	9579*	9662*	9745	9828	9911	9993*	**72**0076*	8	17	25	33	41
525	**72**0159	0242	0324*	0407	0490	0572*	0655	0737*	0820*	0903	8	17	25	33	41
526	0985*	1068	1150*	1233	1315*	1398	1480*	1563	1645*	1728	8	16	25	33	41
527	1810*	1893	1975	2057*	2140	2222	2304*	2387	2469	2551*	8	16	25	33	41
528	2633*	2716	2798	2880*	2962*	3044*	3127	3209	3291	3373*	8	16	25	33	41
529	3455*	3537*	3619*	3701*	3783*	3865*	3947*	4029*	4111*	4193*	8	16	25	33	41
530	4275*	4357*	4439*	4521*	4603*	4685	4767	4849	4930*	5012*	8	16	25	33	41
531	5094*	5176	5258	5339*	5421*	5503	5584*	5666*	5748	5829*	8	16	25	33	41
532	5911*	5993	6074*	6156	6238	6319*	6401	6482*	6564	6645*	8	16	24	33	41
533	6727	6808*	6890	6971*	7053	7134	7215*	7297	7378*	7459*	8	16	24	33	41
534	7541	7622*	7703*	7785	7866	7947*	8028*	8110	8191	8272*	8	16	24	33	41
535	8353*	8434*	8516	8597	8678	8759	8840*	8921*	9002*	9083*	8	16	24	32	41
536	9164*	9245*	9326*	9407*	9488*	9569*	9650*	9731*	9812*	9893	8	16	24	32	40
537	9974	0055	0136	0216*	0297*	0378	0459	0540	0620*	**73**0701*	8	16	24	32	40
538	**73**0782	0862*	0943*	1024	1105	1185*	1266	1346*	1427*	1508	8	16	24	32	40
539	1588*	1669	1749*	1830	1910*	1991	2071*	2152	2232*	2313	8	16	24	32	40
540	2393*	2474	2554*	2634*	2715	2795*	2876	2956	3036*	3116*	8	16	24	32	40
541	3197	3277*	3357*	3438	3518	3598	3678*	3758*	3839	3919	8	16	24	32	40
542	3999	4079	4159*	4239*	4319*	4399*	4479*	4559*	4639*	4719*	8	16	24	32	40
543	4799*	4879*	4959*	5039*	5119*	5199*	5279	5359	5439	5519	8	16	24	32	40

544	5598*	5678*	5758*	5838	5918	5997*	6077*	6157	6237	6316*	8	16	24	32	40
545	6396*	6476	6555*	6635	6715	6794*	6874	6953*	7033*	7113	8	16	24	32	40
546	7192*	7272	7351*	7431	7510*	7590	7669*	7749	7828*	7907*	8	16	24	32	40
547	7987	8066*	8146	8225	8304*	8384	8463	8542*	8622	8701	8	16	24	32	40
548	8780*	8859*	8939	9018	9097	9176*	9255*	9334*	9414	9493	8	16	24	32	40
549	9572	9651	9730*	9809*	9888*	9967*	0046*	0125*	0204*	**74**0283*	8	16	24	32	40
550	**74**0362*	0441*	0520*	0599*	0678	0757	0836	0915	0993*	1072*	8	16	24	32	39
551	1151*	1230	1309	1387*	1466*	1545*	1624	1702*	1781*	1860	8	16	24	32	39
552	1939	2017*	2096	2175	2253*	2332	2410*	2489	2568	2646*	8	16	24	31	39
553	2725	2803*	2882	2960*	3039	3117*	3196	3274*	3352*	3431	8	16	24	31	39
554	3509*	3588	3666*	3744*	3823	3901*	3979*	4058	4136	4214*	8	16	23	31	39
555	4292*	4371	4449	4527*	4605*	4684	4762	4840	4918*	4996*	8	16	23	31	39
556	5074*	5152*	5230*	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	8	16	23	31	39
557	5855	5933	6011	6089	6166*	6244*	6322*	6400*	6478*	6556	8	16	23	31	39
558	6634	6712	6789*	6867*	6945	7023	7100*	7178*	7256	7334	8	16	23	31	39
559	7411*	7489	7567	7644*	7722	7800	7877*	7955	8032*	8110	8	16	23	31	39
560	8188	8265*	8343	8420*	8498	8575*	8653	8730*	8808	8885	8	15	23	31	39
561	8962*	9040	9117*	9195	9272	9349*	9427	9504	9581*	9659	8	15	23	31	39
562	9736	9813*	9890*	9968	0045	0122*	0199*	0276*	0354	**75**0431	8	15	23	31	39
563	**75**0508	0585*	0662*	0739*	0816*	0893*	0970*	1048	1125	1202	8	15	23	31	39
564	1279	1356	1433	1510	1587	1663*	1740*	1817*	1894*	1971*	8	15	23	31	38
565	2048	2125	2202	2278*	2355*	2432*	2509	2586	2662*	2739*	8	15	23	31	38
566	2816	2893	2969*	3046*	3123	3199*	3276*	3353	3429*	3506	8	15	23	31	38
567	3583	3659*	3736	3812*	3889	3965*	4042	4118*	4195	4271*	8	15	23	31	38
568	4348	4424*	4501	4577*	4654	4730	4806*	4883	4959*	5035*	8	15	23	31	38
569	5112	5188*	5264*	5341	5417	5493*	5569*	5646	5722	5798*	8	15	23	31	38
570	5874*	5951	6027	6103	6179*	6255*	6331*	6407*	6483*	6560	8	15	23	30	38
571	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	8	15	23	30	38
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
572	7396	7471*	7547*	7623*	7699*	7775	7851	7927	8003	8078*	8	15	23	30	38
573	8154*	8230	8306	8381*	8457*	8533	8609	8684*	8760*	8836	8	15	23	30	38
574	8911*	8987*	9063	9138*	9214	9290	9365*	9441	9516*	9592	8	15	23	30	38
575	9667*	9743	9818*	9894	9969*	0045	0120*	0196	0271*	**76**0347	8	15	23	30	38
576	**76**0422	0497*	0573	0648*	0723*	0799	0874*	0949*	1025	1100*	8	15	23	30	38
577	1175*	1251	1326	1401*	1476*	1551*	1627	1702	1777*	1852*	8	15	23	30	38
578	1927*	2002*	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2528*	2603*	8	15	23	30	38
579	2678*	2753*	2828*	2903*	2978	3053	3128	3203	3278	3353	7	15	22	30	37
580	3427*	3502*	3577*	3652*	3727	3802	3877	3951*	4026*	4101	7	15	22	30	37
581	4176	4250*	4325*	4400	4475	4549*	4624	4699	4773*	4848	7	15	22	30	37
582	4922*	4997*	5072	5146*	5221	5295*	5370	5445	5519*	5594	7	15	22	30	37
583	5668*	5743	5817*	5891*	5966	6040*	6115	6189*	6264	6338	7	15	22	30	37
584	6412*	6487	6561*	6635*	6710	6784*	6858*	6933	7007	7081*	7	15	22	30	37
585	7155*	7230	7304	7378*	7452*	7526*	7601	7675	7749	7823	7	15	22	30	37
586	7897*	7971*	8045*	8119*	8193*	8268	8342	8416	8490	8564	7	15	22	30	37
587	8638	8712	8786	8860	8933*	9007*	9081*	9155*	9229*	9303	7	15	22	30	37
588	9377	9451	9525	9598*	9672*	9746	9820	9894	9967*	**77**0041*	7	15	22	30	37
589	**77**0115	0189	0262*	0336	0410	0483*	0557	0631	0704*	0778	7	15	22	29	37
590	0852	0925*	0999	1072*	1146	1219*	1293	1366*	1440	1513*	7	15	22	29	37
591	1587	1660*	1734	1807*	1881	1954*	2028	2101*	2174*	2248	7	15	22	29	37
592	2321*	2395	2468	2541*	2615	2688	2761*	2834*	2908	2981	7	15	22	29	37
593	3054*	3127*	3201	3274	3347*	3420*	3493*	3567	3640	3713	7	15	22	29	37
594	3786	3859*	3932*	4005*	4078*	4151*	4224*	4297*	4370*	4443*	7	15	22	29	37
595	4516*	4589*	4662*	4735*	4808*	4881*	4954*	5027*	5100	5173	7	15	22	29	36

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
596	5246	5319	5391*	5464*	5537*	5610	5683	5756	5828*	5901*	7	15	22	29	36
597	5974	6047	6119*	6192*	6265	6337*	6410*	6483	6555*	6628*	7	15	22	29	36
598	6701	6773*	6846	6919	6991*	7064	7136*	7209	7281*	7354	7	15	22	29	36
599	7426*	7499	7571*	7644	7716*	7789	7861*	7934	8006	8078*	7	14	22	29	36
600	8151	8223*	8295*	8368	8440*	8513	8585	8657*	8729*	8802	7	14	22	29	36
601	8874	8946*	9018*	9091	9163	9235*	9307*	9380	9452	9524	7	14	22	29	36
602	9596	9668*	9740*	9812*	9884*	9957	0029	0101	0173	**78**0245	7	14	22	29	36
603	**78**0317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965	7	14	22	29	36
604	1036*	1108*	1180*	1252*	1324	1396	1468	1539*	1611*	1683*	7	14	22	29	36
605	1755	1827	1898*	1970*	2042	2114	2185*	2257*	2329	2400*	7	14	22	29	36
606	2472*	2544	2615*	2687*	2759	2830*	2902	2973*	3045*	3117	7	14	21	29	36
607	3188*	3260	3331*	3403	3474*	3546	3617*	3689	3760*	3832	7	14	21	29	36
608	3903*	3975	4046	4117*	4189	4260*	4331*	4403	4474*	4545*	7	14	21	29	36
609	4617	4688*	4759*	4831	4902	4973*	5044*	5116	5187	5258*	7	14	21	29	36
610	5329*	5401	5472	5543	5614*	5685*	5756*	5827*	5899	5970	7	14	21	28	36
611	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680	7	14	21	28	36
612	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7176*	7247*	7318*	7389*	7	14	21	28	35
613	7460	7531	7602	7672*	7743*	7814*	7885	7956	8026*	8097*	7	14	21	28	35
614	8168	8239	8309*	8380*	8451	8521*	8592*	8663	8733*	8804	7	14	21	28	35
615	8875	8945*	9016	9086*	9157	9228	9298*	9369	9439*	9510	7	14	21	28	35
616	9580*	9651	9721*	9792	9862*	9933	0003*	0073*	0144	**79**0214*	7	14	21	28	35
617	**79**0285	0355*	0425*	0496	0566*	0636*	0707	0777*	0847*	0918	7	14	21	28	35
618	0988	1058*	1129	1199	1269	1339*	1409*	1480	1550	1620	7	14	21	28	35
619	1690*	1760*	1830*	1901	1971	2041	2111	2181	2251*	2321*	7	14	21	28	35
620	2391*	2461*	2531*	2601*	2671*	2741*	2811*	2881*	2951*	3021*	7	14	21	28	35
621	3091*	3161*	3231	3301	3371	3441	3511	3580*	3650*	3720*	7	14	21	28	35
622	3790	3860	3930	3999*	4069*	4139	4209	4278*	4348*	4418	7	14	21	28	35
623	4488	4557*	4627	4697	4766*	4836	4906	4975*	5045	5114*	7	14	21	28	35

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
624	5184*	5254	5323*	5393	5462*	5532	5601*	5671*	5741	5810*	7	14	21	28	35
625	5880	5949	6018*	6088	6157*	6227	6296*	6366	6435*	6504*	7	14	21	28	35
626	6574	6643*	6713	6782	6851*	6921	6990	7059*	7128*	7198	7	14	21	28	35
627	7267*	7336*	7406	7475	7544*	7613*	7682*	7752	7821	7890	7	14	21	28	35
628	7959*	8028*	8097*	8167	8236	8305	8374	8443	8512*	8581*	7	14	21	28	35
629	8650*	8719*	8788*	8857*	8926*	8995*	9064*	9133*	9202*	9271*	7	14	21	28	34
630	9340*	9409	9478	9547	9616	9685	9753*	9822*	9891*	9960*	7	14	21	28	34
631	**80**0029	0098	0166*	0235*	0304*	0373	0442	0510*	0579*	0648	7	14	21	28	34
632	0717	0785*	0854	0923	0991*	1060*	1129	1197*	1266	1335	7	14	21	27	34
633	1403*	1472	1540*	1609	1678	1746*	1815	1883*	1952	2020*	7	14	21	27	34
634	2089	2157*	2226	2294*	2363	2431*	2500	2568	2636*	2705	7	14	21	27	34
635	2773*	2842	2910	2978*	3047	3115*	3183*	3252	3320*	3388*	7	14	21	27	34
636	3457	3525	3593*	3661*	3730	3798	3866*	3934*	4003	4071	7	14	20	27	34
637	4139	4207*	4275*	4343*	4412	4480	4548	4616	4684*	4752*	7	14	20	27	34
638	4820*	4888*	4956*	5024*	5092*	5160*	5228*	5296*	5364*	5432*	7	14	20	27	34
639	5500*	5568*	5636*	5704*	5772*	5840*	5908	5976	6044	6112	7	14	20	27	34
640	6179*	6247*	6315*	6383*	6451	6519	6586*	6654*	6722*	6790	7	14	20	27	34
641	6858	6925*	6993*	7061	7128*	7196*	7264	7332	7399*	7467	7	14	20	27	34
642	7535	7602*	7670	7737*	7805*	7873	7940*	8008	8075*	8143	7	14	20	27	34
643	8210*	8278*	8346	8413*	8481	8548*	8616	8683*	8750*	8818	7	13	20	27	34
644	8885*	8953	9020*	9088	9155*	9222*	9290	9357*	9425	9492	7	13	20	27	34
645	9559*	9627	9694	9761*	9828*	9896	9963*	0030*	0098	**81**0165	7	13	20	27	34
646	**81**0232*	0299*	0366*	0434	0501	0568*	0635*	0702*	0770	0837	7	13	20	27	34
647	0904	0971	1038*	1105*	1172*	1239*	1306*	1373*	1440*	1507*	7	13	20	27	34

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
648	1575	1642	1709	1776	1843	1909*	1976*	2043*	2110*	2177*	7	13	20	27	33
649	2244*	2311*	2378*	2445	2512	2579	2646	2712*	2779*	2846*	7	13	20	27	33
650	2913	2980	3046*	3113*	3180*	3247	3314	3380*	3447*	3514	7	13	20	27	33
651	3580*	3647*	3714	3781	3847*	3914	3981	4047*	4114	4180*	7	13	20	27	33
652	4247*	4314	4380*	4447	4513*	4580*	4647	4713*	4780	4846*	7	13	20	27	33
653	4913	4979*	5046	5112*	5179	5245*	5312	5378	5444*	5511	7	13	20	27	33
654	5577*	5644	5710*	5776*	5843	5909*	5976	6042	6108*	6174*	7	13	20	27	33
655	6241	6307*	6373*	6440	6506	6572*	6638*	6705	6771	6837*	7	13	20	27	33
656	6903*	6970	7036	7102	7168*	7234*	7300*	7367	7433	7499	7	13	20	26	33
657	7565	7631	7697*	7763*	7829*	7895*	7961*	8027*	8093*	8159*	7	13	20	26	33
658	8225*	8291*	8357*	8423*	8489*	8555*	8621*	8687*	8753*	8819*	7	13	20	26	33
659	8885	8951	9017	9083	9148*	9214*	9280*	9346	9412	9478	7	13	20	26	33
660	9543*	9609*	9675*	9741	9807	9872*	9938*	0004	0070	**82**0135*	7	13	20	26	33
661	**82**0201	0267	0332*	0398*	0464	0529*	0595	0661	0726*	0792	7	13	20	26	33
662	0857*	0923*	0989	1054*	1120	1185*	1251	1316*	1382	1448	7	13	20	26	33
663	1513*	1579	1644*	1709*	1775	1840*	1906	1971*	2037	2102*	7	13	20	26	33
664	2168	2233	2298*	2364	2429*	2494*	2560	2625*	2691	2756	7	13	20	26	33
665	2821*	2886*	2952	3017*	3082*	3148	3213	3278*	3343*	3409	7	13	20	26	33
666	3474	3539	3604*	3669*	3734*	3800	3865	3930	3995*	4060*	7	13	20	26	33
667	4125*	4190*	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	7	13	20	26	33
668	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	6	13	19	26	32
669	5426	5491	5555*	5620*	5685*	5750*	5815	5880	5945	6009*	6	13	19	26	32
670	6074*	6139*	6204	6269	6334	6398*	6463*	6528	6593	6657*	6	13	19	26	32
671	6722*	6787	6851*	6916*	6981	7046	7110*	7175	7239*	7304*	6	13	19	26	32
672	7369	7433*	7498*	7563	7627*	7692	7756*	7821	7885*	7950*	6	13	19	26	32
673	8015	8079*	8144	8208*	8273	8337*	8402	8466*	8531	8595	6	13	19	26	32
674	8659*	8724	8788*	8853	8917*	8981*	9046	9110*	9175	9239	6	13	19	26	32
675	9303*	9368	9432	9496*	9561	9625	9689*	9753*	9818	9882	6	13	19	26	32

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
676	9946*	0010*	0075	0139	0203*	0267*	0331*	0396	0460	830524*	6	13	19	26	32
677	830588*	0652*	0716*	0781	0845	0909	0973	1037	1101*	1165*	6	13	19	26	32
678	1229*	1293*	1357*	1421*	1485*	1549*	1613*	1677*	1741*	1805*	6	13	19	26	32
679	1869*	1933*	1997*	2061*	2125*	2189	2253	2317	2381	2445	6	13	19	26	32
680	2508*	2572*	2636*	2700	2764	2828	2891*	2955*	3019*	3083	6	13	19	26	32
681	3147	3210*	3274*	3338	3402	3465*	3529*	3593	3656*	3720*	6	13	19	25	32
682	3784	3848	3911*	3975	4039	4102*	4166	4229*	4293*	4357	6	13	19	25	32
683	4420*	4484	4547*	4611	4674*	4738*	4802	4865*	4929	4992*	6	13	19	25	32
684	5056	5119*	5183	5246*	5310	5373	5436*	5500	5563*	5627	6	13	19	25	32
685	5690*	5753*	5817	5880*	5944	6007	6070*	6134	6197	6260*	6	13	19	25	32
686	6324	6387	6450*	6513*	6577	6640*	6703*	6767	6830	6893*	6	13	19	25	32
687	6956*	7019*	7083	7146	7209*	7272*	7335*	7399	7462	7525	6	13	19	25	32
688	7588	7651*	7714*	7777*	7840*	7903*	7967	8030	8093	8156	6	13	19	25	32
689	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	6	13	19	25	31
690	8849	8912	8974*	9037*	9100*	9163*	9226*	9289	9352	9415	6	13	19	25	31
691	9478	9540*	9603*	9666*	9729	9792	9854*	9917*	9980*	840043	6	13	19	25	31
692	840106	0168*	0231*	0294	0357	0419*	0482	0545	0607*	0670*	6	13	19	25	31
693	0733	0795*	0858*	0921	0983*	1046	1109	1171*	1234	1296*	6	13	19	25	31
694	1359	1422	1484*	1547	1609*	1672	1734*	1797	1859*	1922	6	13	19	25	31
695	1984*	2047	2109*	2172	2234*	2297	2359*	2422	2484	2546*	6	12	19	25	31
696	2609	2671*	2734	2796	2858*	2921	2983	3045*	3108	3170	6	12	19	25	31
697	3232*	3295	3357	3419*	3481*	3544	3606	3668*	3730*	3793	6	12	19	25	31
698	3855	3917*	3979*	4042	4104	4166	4228*	4290*	4352*	4415	6	12	19	25	31
699	4477	4539	4601	4663*	4725*	4787*	4849*	4911*	4973*	5035*	6	12	19	25	31

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
700	5098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656	6	12	19	25	31
701	5718	5779*	5841*	5903*	5965*	6027*	6089*	6151	6213	6275	6	12	19	25	31
702	6337	6398*	6460*	6522*	6584*	6646	6708	6769*	6831*	6893*	6	12	19	25	31
703	6955	7017	7078*	7140*	7202	7264	7325*	7387*	7449	7510*	6	12	19	25	31
704	7572*	7634	7696	7757*	7819	7880*	7942*	8004	8065*	8127*	6	12	18	25	31
705	8189	8250*	8312	8373*	8435	8497	8558*	8620	8681*	8743	6	12	18	25	31
706	8804*	8866	8927*	8989	9050*	9112	9173*	9235	9296*	9357*	6	12	18	25	31
707	9419	9480*	9542	9603*	9665	9726	9787*	9849	9910*	9971*	6	12	18	25	31
708	**85**0033	094*	0155*	0217	0278*	0339*	0401	0462	0523*	0584*	6	12	18	25	31
709	0646	0707	0768*	0829*	0891	0952	1013*	1074*	1135*	1197	6	12	18	24	31
710	1258	1319*	1380*	1441*	1502*	1564	1625	1686	1747	1808*	6	12	18	24	31
711	1869*	1930*	1991*	2052*	2113*	2174*	2235*	2296*	2357*	2418*	6	12	18	24	31
712	2479*	2540*	2601*	2662*	2723*	2784*	2845*	2906*	2967*	3028*	6	12	18	24	30
713	3089*	3150	3211	3272	3333	3393*	3454*	3515*	3576*	3637	6	12	18	24	30
714	3698	3759	3819*	3880*	3941	4002	4063	4123*	4184*	4245	6	12	18	24	30
715	4306	4366*	4427*	4488	4548*	4609*	4670	4731	4791*	4852	6	12	18	24	30
716	4913	4973*	5034	5094*	5155*	5216	5276*	5337	5397*	5458*	6	12	18	24	30
717	5519	5579*	5640	5700*	5761	5821*	5882	5942*	6003	6063*	6	12	18	24	30
718	6124	6184*	6245	6305*	6366	6426*	6487	6547*	6608	6668	6	12	18	24	30
719	6728*	6789	6849*	6910	6970	7030*	7091	7151*	7211*	7272	6	12	18	24	30
720	7332	7392*	7453	7513	7573*	7633*	7694	7754*	7814*	7875	6	12	18	24	30
721	7935	7995	8055*	8115*	8176	8236	8296*	8356*	8416*	8477	6	12	18	24	30
722	8537	8597	8657	8717*	8777*	8837*	8897*	8958	9018	9078	6	12	18	24	30
723	9138	9198	9258	9318	9378*	9438*	9498*	9558*	9618*	9678*	6	12	18	24	30
724	9738*	9798*	9858*	9918	9978	0038	0098	0158	0218	**86**0278	6	12	18	24	30
725	**86**0338	0397*	0457*	0517*	0577*	0637	0697	0757	0816*	0876*	6	12	18	24	30
726	0936*	0996	1056	1116	1175*	1235*	1295	1355	1414*	1474*	6	12	18	24	30
727	1534	1594	1653*	1713*	1773	1832*	1892*	1952	2012	2071*	6	12	18	24	30

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
728	2131	2191	2250*	2310	2369*	2429*	2489	2548*	2608	2667*	6	12	18	24	30
729	2727*	2787	2846*	2906	2965*	3025	3084*	3144	3203*	3263	6	12	18	24	30
730	3322*	3382	3441*	3501	3560*	3620	3679*	3739	3798*	3857*	6	12	18	24	30
731	3917	3976*	4036	4095*	4154*	4214	4273*	4333	4392	4451*	6	12	18	24	30
732	4511	4570	4629*	4689	4748	4807*	4866*	4926	4985	5044*	6	12	18	24	30
733	5103*	5163	5222	5281*	5340*	5400	5459	5518*	5577*	5636*	6	12	18	24	30
734	5696	5755	5814	5873*	5932*	5991*	6050*	6110	6169	6228	6	12	18	24	30
735	6287	6346	6405	6464*	6523*	6582*	6641*	6700*	6759*	6818*	6	12	18	24	30
736	6877*	6936*	6995*	7054*	7113*	7172*	7231*	7290*	7349*	7408*	6	12	18	24	29
737	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7820*	7879*	7938*	7997*	6	12	18	24	29
738	8056	8115	8174	8232*	8291*	8350	8409	8468	8526*	8585*	6	12	18	24	29
739	8644	8703	8761*	8820*	8879	8938	8996*	9055*	9114	9173	6	12	18	23	29
740	9231*	9290	9349	9407*	9466	9525	9583*	9642	9700*	9759*	6	12	18	23	29
741	9818	9876*	9935	9994	0052*	0111	0169*	0228	0286*	**870**345	6	12	18	23	29
742	**870**403*	0462	0520*	0579	0637*	0696	0754*	0813	0871*	0930	6	12	18	23	29
743	0988*	1047	1105*	1164	1222*	1280*	1339	1397*	1456	1514*	6	12	18	23	29
744	1572*	1631	1689*	1748	1806	1864*	1923	1981	2039*	2097*	6	12	18	23	29
745	2156	2214*	2272*	2331	2389	2447*	2505*	2564	2622	2680*	6	12	17	23	29
746	2738*	2797	2855	2913	2971*	3029*	3087*	3146	3204	3262	6	12	17	23	29
747	3320*	3378*	3436*	3494*	3553	3611	3669	3727	3785	3843*	6	12	17	23	29
748	3901*	3959*	4017*	4075*	4133*	4191*	4249*	4307*	4365*	4423*	6	12	17	23	29
749	4481*	4539*	4597*	4655*	4713*	4771*	4829*	4887*	4945	5003	6	12	17	23	29
750	5061	5119	5177	5234*	5292*	5350*	5408*	5466	5524	5582	6	12	17	23	29
751	5639*	5697*	5755*	5813	5871	5928*	5986*	6044*	6102	6160	6	12	17	23	29

752	6217*	6275*	6333	6391	6448*	6506*	6564	6621*	6679*	6737	6	12	17	23	29
753	6794*	6852*	6910	6967*	7025*	7083	7140*	7198*	7256	7313*	6	12	17	23	29
754	7371	7428*	7486*	7544	7601*	7659	7716*	7774	7831*	7889	6	12	17	23	29
755	7946*	8004	8061*	8119	8176*	8234	8291*	8349	8406*	8464	6	11	17	23	29
756	8521*	8579	8636*	8694	8751*	8808*	8866	8923*	8981	9038*	6	11	17	23	29
757	9095*	9153	9210*	9267*	9325	9382*	9439*	9497	9554*	9611*	6	11	17	23	29
758	9669	9726	9783*	9841	9898	9955*	0012*	0070	0127	880184*	6	11	17	23	29
759	880241*	0298*	0356	0413	0470*	0527*	0584*	0642	0699	0756	6	11	17	23	29
760	0813*	0870*	0927*	0984*	1042	1099	1156	1213	1270*	1327*	6	11	17	23	29
761	1384*	1441*	1498*	1555*	1612*	1669*	1726*	1783*	1840*	1897*	6	11	17	23	29
762	1954*	2011*	2068*	2125*	2182*	2239*	2296*	2353*	2410*	2467*	6	11	17	23	28
763	2524*	2581	2638	2695	2752	2809	2865*	2922*	2979*	3036*	6	11	17	23	28
764	3093	3150	3207	3263*	3320*	3377	3434	3491	3547*	3604*	6	11	17	23	28
765	3661	3718	3774*	3831*	3888	3945	4001*	4058*	4115	4172	6	11	17	23	28
766	4228*	4285	4342	4398*	4455	4512	4568*	4625	4682	4738*	6	11	17	23	28
767	4795	4851*	4908*	4965	5021*	5078	5134*	5191*	5248	5304*	6	11	17	23	28
768	5361	5417*	5474	5530*	5587	5643*	5700	5756*	5813	5869*	6	11	17	23	28
769	5926	5982*	6039	6095*	6152	6208*	6265	6321	6377*	6434	6	11	17	23	28
770	6490*	6547	6603*	6659*	6716	6772*	6829	6885	6941*	6998	6	11	17	23	28
771	7054	7110*	7167	7223	7279*	7335*	7392	7448*	7504*	7561	6	11	17	23	28
772	7617	7673*	7729*	7786	7842	7898	7954*	8010*	8067	8123	6	11	17	22	28
773	8179	8235*	8291*	8348	8404	8460	8516	8572*	8628*	8684*	6	11	17	22	28
774	8740*	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9133*	9189*	9245*	6	11	17	22	28
775	9301*	9357*	9413*	9469*	9525*	9581*	9637*	9693*	9749*	9805*	6	11	17	22	28
776	9861*	9917*	9973*	0029*	0085*	0141	0197	0253	0309	890365	6	11	17	22	28
777	890421	0476*	0532*	0588*	0644*	0700	0756	0812	0867*	0923*	6	11	17	22	28
778	0979*	1035	1091	1147	1202*	1258*	1314	1370	1425*	1481*	6	11	17	22	28
779	1537	1593	1648*	1704*	1760	1816	1871*	1927*	1983	2038*	6	11	17	22	28
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
780	2094*	2150	2205*	2261*	2317	2372*	2428*	2484	2539*	2595	6	11	17	22	28
781	2651	2706*	2762	2817*	2873	2928*	2984*	3040	3095*	3151	6	11	17	22	28
782	3206*	3262	3317*	3373	3428*	3484	3539*	3595	3650*	3706	6	11	17	22	28
783	3761*	3817	3872*	3928	3983*	4039	4094	4149*	4205	4260*	6	11	17	22	28
784	4316	4371	4426*	4482	4537*	4592*	4648	4703*	4758*	4814	6	11	17	22	28
785	4869*	4924*	4980	5035*	5090*	5146	5201	5256*	5312	5367	6	11	17	22	28
786	5422*	5477*	5533	5588	5643*	5698*	5753*	5809	5864	5919*	6	11	17	22	28
787	5974*	6029*	6085	6140	6195	6250*	6305*	6360*	6415*	6471	6	11	17	22	28
788	6526	6581	6636	6691*	6746*	6801*	6856*	6911*	6966*	7021*	6	11	17	22	28
789	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	6	11	17	22	28
790	7627	7682	7737	7791*	7846*	7901*	7956*	8011*	8066*	8121*	5	11	16	22	27
791	8176	8231	8286	8341	8396	8450*	8505*	8560*	8615	8670	5	11	16	22	27
792	8725	8780	8834*	8889*	8944	8999	9054	9108*	9163*	9218	5	11	16	22	27
793	9273	9327*	9382*	9437	9492	9546*	9601*	9656	9711	9765*	5	11	16	22	27
794	9820*	9875	9929*	9984*	0039	0093*	0148*	0203	0257*	**900**312	5	11	16	22	27
795	**900**367	0421*	0476	0530*	0585*	0640	0694*	0749	0803*	0858*	5	11	16	22	27
796	0913	0967*	1022	1076*	1131	1185*	1240	1294*	1349	1403*	5	11	16	22	27
797	1458	1512*	1567	1621*	1676	1730*	1785	1839*	1894	1948	5	11	16	22	27
798	2002*	2057	2111*	2166	2220*	2274*	2329	2383*	2438	2492	5	11	16	22	27
799	2546*	2601	2655	2709*	2764	2818	2872*	2927	2981	3035*	5	11	16	22	27
800	3089*	3144	3198*	3252*	3307	3361	3415*	3469*	3524	3578	5	11	16	22	27
801	3632*	3686*	3740*	3795	3849	3903*	3957*	4011*	4066	4120	5	11	16	22	27
802	4174	4228*	4282*	4336*	4390*	4445	4499	4553	4607	4661	5	11	16	22	27
803	4715*	4769*	4823*	4877*	4931*	4985*	5039*	5093*	5148	5202	5	11	16	22	27

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
804	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5687*	5741*	5	11	16	22	27
805	5795*	5849*	5903*	5957*	6011*	6065*	6119	6173	6227	6281	5	11	16	22	27
806	6335	6388*	6442*	6496*	6550*	6604	6658	6712	6765*	6819*	5	11	16	22	27
807	6873*	6927	6981	7034*	7088*	7142*	7196	7250	7303*	7357*	5	11	16	22	27
808	7411	7465	7518*	7572*	7626	7680	7733*	7787	7841	7894*	5	11	16	21	27
809	7948*	8002	8055*	8109*	8163	8216*	8270	8324	8377*	8431	5	11	16	21	27
810	8485	8538*	8592	8645*	8699	8753	8806*	8860	8913*	8967	5	11	16	21	27
811	9020*	9074	9127*	9181	9235	9288*	9342	9395*	9449	9502*	5	11	16	21	27
812	9556	9609*	9662*	9716	9769*	9823	9876*	9930	9983*	**91**0037	5	11	16	21	27
813	**91**0090*	0143*	0197	0250*	0304	0357*	0410*	0464	0517*	0571	5	11	16	21	27
814	0624	0677*	0731	0784	0837*	0891	0944	0997*	1051	1104	5	11	16	21	27
815	1157*	1210*	1264	1317	1370*	1423*	1477	1530	1583*	1636*	5	11	16	21	27
816	1690	1743	1796*	1849*	1902*	1956	2009	2062*	2115*	2168*	5	11	16	21	27
817	2222	2275	2328	2381	2434*	2487*	2540*	2593*	2647	2700	5	11	16	21	27
818	2753	2806	2859	2912*	2965*	3018*	3071*	3124*	3177*	3230*	5	11	16	21	27
819	3283*	3336*	3389*	3442*	3495*	3548*	3601*	3654*	3707*	3760*	5	11	16	21	26
820	3813*	3866*	3919*	3972*	4025*	4078*	4131*	4184	4237	4290	5	11	16	21	26
821	4343	4396	4448*	4501*	4554*	4607*	4660	4713	4766	4818*	5	11	16	21	26
822	4871*	4924*	4977	5030	5083	5135*	5188*	5241	5294	5347	5	11	16	21	26
823	5399*	5452*	5505	5558	5610*	5663*	5716	5769	5821*	5874*	5	11	16	21	26
824	5927	5979*	6032*	6085	6137*	6190*	6243	6295*	6348*	6401	5	11	16	21	26
825	6453*	6506*	6559	6611*	6664	6717	6769*	6822	6874*	6927	5	11	16	21	26
826	6980	7032*	7085	7137*	7190	7242*	7295	7347*	7400	7452*	5	11	16	21	26
827	7505*	7558	7610*	7663	7715*	7768	7820	7872*	7925	7977*	5	10	16	21	26
828	8030	8082*	8135	8187*	8240	8292*	8344*	8397	8449*	8502	5	10	16	21	26
829	8554*	8606*	8659	8711*	8764	8816	8868*	8921	8973	9025*	5	10	16	21	26
830	9078	9130	9182*	9235	9287	9339*	9391*	9444	9496	9548*	5	10	16	21	26
831	9601	9653	9705*	9757*	9810	9862	9914	9966*	0018*	**92**0071	5	10	16	21	26
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
832	**92**0123	0175*	0227*	0279*	0332	0384	0436	0488*	0540*	0592*	5	10	16	21	26
833	0645	0697	0749	0801	0853	0905*	0957*	1009*	1061*	1113*	5	10	16	21	26
834	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	5	10	16	21	26
835	1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	5	10	16	21	26
836	2206	2258	2310	2362	2414	2465*	2517*	2569*	2621*	2673*	5	10	16	21	26
837	2725	2777	2829	2881	2932*	2984*	3036*	3088*	3140	3192	5	10	16	21	26
838	3244	3295*	3347*	3399	3451	3503	3554*	3606*	3658	3710	5	10	16	21	26
839	3761*	3813*	3865	3917	3968*	4020*	4072	4124	4175*	4227*	5	10	16	21	26
840	4279	4330*	4382*	4434	4486	4537*	4589	4641	4692*	4744	5	10	16	21	26
841	4795*	4847*	4899	4950*	5002*	5054	5105*	5157	5208*	5260*	5	10	15	21	26
842	5312	5363*	5415	5466*	5518	5569*	5621	5672*	5724*	5776	5	10	15	21	26
843	5827*	5879	5930*	5982	6033*	6085	6136*	6188	6239*	6290*	5	10	15	21	26
844	6342	6393*	6445	6496*	6548	6599*	6651	6702	6753*	6805	5	10	15	21	26
845	6856*	6908	6959	7010*	7062	7113*	7164*	7216	7267*	7319	5	10	15	21	26
846	7370	7421*	7473	7524	7575*	7626*	7678	7729*	7780*	7832	5	10	15	21	26
847	7883	7934*	7985*	8037	8088	8139*	8190*	8242	8293	8344*	5	10	15	21	26
848	8395*	8447	8498	8549	8600*	8651*	8703	8754	8805	8856*	5	10	15	20	26
849	8907*	8958*	9009*	9061	9112	9163	9214*	9265*	9316*	9367*	5	10	15	20	26
850	9418*	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9878*	5	10	15	20	26
851	9929*	9980*	0031*	0082*	0133*	0184*	0235*	0286*	0337*	**93**0388*	5	10	15	20	26
852	**93**0439*	0490*	0541*	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	5	10	15	20	25
853	0949	0999*	1050*	1101*	1152*	1203*	1254	1305	1356	1407	5	10	15	20	25
854	1457*	1508*	1559*	1610	1661	1712	1762*	1813*	1864*	1915	5	10	15	20	25
855	1966	2016*	2067*	2118	2169	2220	2270*	2321*	2372	2423	5	10	15	20	25
856	2473*	2524	2575	2625*	2676*	2727	2778	2828*	2879	2930	5	10	15	20	25

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
857	2980*	3031	3082	3132*	3183	3234	3284*	3335	3386	3436*	5	10	15	20	25
858	3487	3537*	3588*	3639	3689*	3740	3790*	3841	3892	3942*	5	10	15	20	25
859	3993	4043*	4094	4144*	4195	4245*	4296	4346*	4397	4447*	5	10	15	20	25
860	4498	4548*	4599	4649*	4700	4750*	4801	4851*	4902	4952*	5	10	15	20	25
861	5003	5053*	5104	5154	5204*	5255	5305*	5356	5406	5456*	5	10	15	20	25
862	5507	5557*	5608	5658	5708*	5759	5809	5859*	5910	5960	5	10	15	20	25
863	6010*	6061	6111	6161*	6212	6262	6312*	6362*	6413	6463	5	10	15	20	25
864	6513*	6564	6614	6664*	6714*	6764*	6815	6865	6915*	6965*	5	10	15	20	25
865	7016	7066	7116*	7166*	7216*	7267	7317	7367	7417*	7467*	5	10	15	20	25
866	7517*	7568	7618	7668	7718	7768*	7818*	7868*	7918*	7969	5	10	15	20	25
867	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8319*	8369*	8419*	8469*	5	10	15	20	25
868	8519*	8569*	8619*	8669*	8719*	8769*	8819*	8869*	8919*	8969*	5	10	15	20	25
869	9019*	9069*	9119*	9169*	9219*	9269*	9319*	9369	9419	9469	5	10	15	20	25
870	9519	9569	9619	9668*	9718*	9768*	9818*	9868*	9918	9968	5	10	15	20	25
871	**94**0018	0068	0117*	0167*	0217*	0267	0317	0367	0416*	0466*	5	10	15	20	25
872	0516	0566	0616	0665*	0715*	0765	0815	0864*	0914*	0964	5	10	15	20	25
873	1014	1063*	1113*	1163	1213	1262*	1312*	1362	1412	1461*	5	10	15	20	25
874	1511	1561	1610*	1660	1710	1759*	1809	1859	1908*	1958	5	10	15	20	25
875	2008	2057*	2107	2156*	2206*	2256	2305*	2355	2404*	2454*	5	10	15	20	25
876	2504	2553*	2603	2652*	2702	2751*	2801	2851	2900*	2950	5	10	15	20	25
877	2999*	3049	3098*	3148	3197*	3247	3296*	3346	3395*	3445	5	10	15	20	25
878	3494*	3543*	3593	3642*	3692	3741*	3791	3840*	3890	3939	5	10	15	20	25
879	3988*	4038	4087*	4137	4186	4235*	4285	4334*	4383*	4433	5	10	15	20	25
880	4482*	4532	4581	4630*	4680	4729	4778*	4827*	4877	4926*	5	10	15	20	25
881	4975*	5025	5074	5123*	5173	5222	5271*	5320*	5370	5419	5	10	15	20	25
882	5468*	5517*	5567	5616	5665	5714*	5763*	5813	5862	5911*	5	10	15	20	25
883	5960*	6009*	6059	6108	6157	6206*	6255*	6304*	6353*	6403*	5	10	15	20	25
884	6452	6501	6550*	6599*	6648*	6697*	6746*	6796	6845	6894	5	10	15	20	25
885	6943	6992	7041	7090	7139*	7188*	7237*	7286*	7335*	7384*	5	10	15	20	25

Продолжение табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
886	7433*	7482*	7531*	7580*	7629*	7678*	7727*	7776*	7825*	7874*	5	10	15	20	24
887	7923*	7972*	8021*	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	5	10	15	20	24
888	8412*	8461*	8510*	8559*	8608*	8657	8706	8755	8804	8852*	5	10	15	20	24
889	8901*	8950*	8999	9048	9097	9145*	9194*	9243*	9292	9341	5	10	15	20	24
890	9390	9438*	9487*	9536	9585	9633*	9682*	9731	9780	9828*	5	10	15	20	24
891	9877*	9926	9975	0023*	0072*	0121	0170	0218*	0267	**95**0316	5	10	15	19	24
892	**95**0364*	0413*	0462	0510*	0559*	0608	0656*	0705*	0754	0802*	5	10	15	19	24
893	0851	0900	0948*	0997	1045*	1094*	1143	1191*	1240	1288*	5	10	15	19	24
894	1337*	1386	1434*	1483	1531*	1580	1628*	1677	1725*	1774*	5	10	15	19	24
895	1823	1871*	1920	1968*	2017	2065*	2114	2162*	2211	2259*	5	10	15	19	24
896	2308	2356	2404*	2453	2501*	2550	2598*	2647	2695*	2744	5	10	15	19	24
897	2792	2840*	2889	2937*	2986	3034	3082*	3131	3179*	3227*	5	10	15	19	24
898	3276	3324*	3373	3421	3469*	3518	3566	3614*	3663	3711	5	10	15	19	24
899	3759*	3807*	3856	3904*	3952*	4001	4049	4097*	4145*	4194	5	10	14	19	24
900	4242*	4290*	4339	4387	4435	4483*	4531*	4580	4628	4676*	5	10	14	19	24
901	4724*	4772*	4821	4869	4917*	4965*	5013*	5062	5110	5158	5	10	14	19	24
902	5206*	5254*	5302*	5350*	5399	5447	5495	5543	5591*	5639*	5	10	14	19	24
903	5687*	5735*	5783*	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	5	10	14	19	24
904	6168	6216	6264*	6312*	6360*	6408*	6456*	6504*	6552*	6600*	5	10	14	19	24
905	6648*	6696*	6744*	6792*	6840	6888	6936	6984	7032	7080	5	10	14	19	24
906	7128	7176	7224	7271*	7319*	7367*	7415*	7463*	7511*	7559	5	10	14	19	24
907	7607	7655	7703	7750*	7798*	7846*	7894	7942	7990	8038	5	10	14	19	24
908	8085*	8133*	8181	8229	8277	8324*	8372*	8420*	8468	8516	5	10	14	19	24
909	8563*	8611*	8659	8707	8754*	8802*	8850	8898	8945*	8993*	5	10	14	19	24
910	9041	9089	9136*	9184*	9232	9279*	9327*	9375	9423	9470*	5	10	14	19	24
911	9518	9566	9613*	9661	9709	9756*	9804	9851*	9899*	9947	5	10	14	19	24

912	9994*	0042	0090	0137*	0185	0232*	0280	0328	0375*	**96**0423	5	10	14	19	24
913	**96**0470*	0518	0565*	0613	0661	0708*	0756	0803*	0851	0898*	5	10	14	19	24
914	0946	0993*	1041	1088*	1136	1183*	1231	1278*	1326	1373*	5	9	14	19	24
915	1421	1468*	1516	1563	1610*	1658	1705*	1753	1800*	1848	5	9	14	19	24
916	1895	1942*	1990	2037*	2085	2132	2179*	2227	2274*	2321*	5	9	14	19	24
917	2369	2416*	2464	2511	2558*	2606	2653	2700*	2748	2795	5	9	14	19	24
918	2842*	2889*	2937	2984*	3031*	3079	3126	3173*	3220*	3268	5	9	14	19	24
919	3315*	3362*	3410	3457	3504	3551*	3598*	3646	3693	3740*	5	9	14	19	24
920	3787*	3835	3882	3929	3976*	4023*	4070*	4118	4165	4212	5	9	14	19	24
921	4259*	4306*	4353*	4401	4448	4495	4542	4589*	4636*	4683*	5	9	14	19	24
922	4730*	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5060*	5107*	5154*	5	9	14	19	24
923	5201*	5248*	5295*	5342*	5389*	5436*	5483*	5530*	5577*	5624*	5	9	14	19	24
924	5671*	5718*	5765*	5812*	5859*	5906*	5953*	6000*	6047*	6094*	5	9	14	19	23
925	6141*	6188*	6235*	6282*	6329	6376	6423	6470	6517	6564	5	9	14	19	23
926	6610*	6657*	6704*	6751*	6798*	6845	6892	6939	6986	7032*	5	9	14	19	23
927	7079*	7126*	7173	7220	7267	7313*	7360*	7407*	7454	7501	5	9	14	19	23
928	7547*	7594*	7641*	7688	7735	7781*	7828*	7875	7922	7968*	5	9	14	19	23
929	8015*	8062	8109	8155*	8202*	8249	8296	8342*	8389*	8436	5	9	14	19	23
930	8482*	8529*	8576	8623	8669*	8716	8763	8809*	8856	8903	5	9	14	19	23
931	8949*	8996	9042*	9089*	9136	9182*	9229	9276	9322*	9369	5	9	14	19	23
932	9415*	9462*	9509	9555*	9602	9648*	9695	9741*	9788*	9835	5	9	14	19	23
933	9881*	9928	9974*	0021	0067*	0114	0160*	0207	0253*	**97**0300	5	9	14	19	23
934	**97**0346*	0393	0439*	0486	0532*	0579	0625*	0672	0718*	0765	5	9	14	19	23
935	0811*	0858	0904	0950*	0997	1043*	1090	1136*	1183	1229	5	9	14	19	23
936	1275*	1322	1368*	1415	1461	1507*	1554	1600*	1646*	1693	5	9	14	19	23
937	1739*	1785*	1832	1878*	1924*	1971	2017*	2063*	2110	2156*	5	9	14	19	23
938	2202*	2249	2295	2341*	2387*	2434	2480*	2526*	2573	2619	5	9	14	19	23
939	2665*	2711*	2758	2804	2850*	2896*	2943	2989	3035	3081*	5	9	14	18	23
940	3127*	3174	3220	3266	3312*	3358*	3404*	3451	3497	3543	5	9	14	18	23
941	3589*	3635*	3681*	3728	3774	3820	3866	3912*	3958*	4004*	5	9	14	18	23
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Окончание табл. IX.2

	Мантиссы десятичных логарифмов										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
942	4050*	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4373*	4419*	4465*	5	9	14	18	23
943	4511*	4557*	4603*	4649*	4695*	4741*	4787*	4833*	4879*	4925*	5	9	14	18	23
944	4971*	5017*	5063*	5109*	5155*	5201*	5247*	5293*	5339*	5385*	5	9	14	18	23
945	5431*	5477*	5523*	5569*	5615*	5661*	5707	5753	5799	5845	5	9	14	18	23
946	5891	5937	5982*	6028*	6074*	6120*	6166*	6212	6258	6304	5	9	14	18	23
947	6349*	6395*	6441*	6487*	6533	6579	6625	6670*	6716*	6762*	5	9	14	18	23
948	6808	6854	6899*	6945*	6991*	7037	7083	7128*	7174*	7220	5	9	14	18	23
949	7266	7311*	7357*	7403	7449	7494*	7540*	7586	7632	7677*	5	9	14	18	23
950	7723*	7769	7815	7860*	7906	7952	7997*	8043	8089	8134*	5	9	14	18	23
951	8180*	8226	8271*	8317	8363	8408*	8454	8500	8545*	8591	5	9	14	18	23
952	8636*	8682*	8728	8773*	8819	8864*	8910*	8956	9001*	9047	5	9	14	18	23
953	9092*	9138	9184	9229*	9275	9320*	9366	9411*	9457	9502*	5	9	14	18	23
954	9548	9593*	9639	9684*	9730	9775*	9821	9866*	9912	9957*	5	9	14	18	23
955	**98**0003	0048*	0094	0139*	0185	0230*	0276	0321*	0367	0412	5	9	14	18	23
956	0457*	0503	0548*	0594	0639*	0684*	0730	0775*	0821	0866*	5	9	14	18	23
957	0911*	0957	1002*	1048	1093	1138*	1184	1229	1274*	1320	5	9	14	18	23
958	1365*	1410*	1456	1501	1546*	1592	1637	1682*	1728	1773	5	9	14	18	23
959	1818*	1863*	1909	1954	1999*	2044*	2090	2135	2180*	2225*	5	9	14	18	23
960	2271	2316	2361*	2406*	2452	2497	2542*	2587*	2632*	2678	5	9	14	18	23
961	2723	2768*	2813*	2858*	2904	2949	2994	3039*	3084*	3129*	5	9	14	18	23
962	3175	3220	3265	3310	3355*	3400*	3445*	3490*	3536	3581	5	9	14	18	23
963	3626	3671	3716	3761*	3806*	3851*	3896*	3941*	3986*	4031*	5	9	14	18	23
964	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	5	9	14	18	23
965	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	4	9	13	18	22
966	4977	5022	5067	5111*	5156*	5201*	5246*	5291*	5336*	5381*	4	9	13	18	22
967	5426	5471	5516	5561	5606	5650*	5695*	5740*	5785*	5830	4	9	13	18	22
968	5875	5920	5965	6009*	6054*	6099*	6144	6189	6234	6278*	4	9	13	18	22

969	6323*	6368*	6413	6458	6503	6547*	6592*	6637	6682	6726*	4	9	13	18	22
970	6771*	6816*	6861	6906	6950*	6995*	7040	7085	7129*	7174*	4	9	13	18	22
971	7219	7263*	7308*	7353	7398	7442*	7487*	7532	7576*	7621*	4	9	13	18	22
972	7666	7710*	7755*	7800	7844*	7889*	7934	7978*	8023*	8068	4	9	13	18	22
973	8112*	8157	8202	8246*	8291	8335*	8380*	8425	8469*	8514	4	9	13	18	22
974	8558*	8603*	8648	8692*	8737	8781*	8826	8870*	8915*	8960	4	9	13	18	22
975	9004*	9049	9093*	9138	9182*	9227	9271*	9316	9360*	9405	4	9	13	18	22
976	9449*	9494	9538*	9583	9627*	9672	9716*	9761	9805*	9850	4	9	13	18	22
977	9894*	9939	9983	0027*	0072	0116*	0161	0205*	0250	**99**0294	4	9	13	18	22
978	**99**0338*	0383	0427*	0472	0516	0560*	0605	0649*	0693*	0738	4	9	13	18	22
979	0782*	0827	0871	0915*	0960	1004	1048*	1093	1137	1181*	4	9	13	18	22
980	1226	1270	1314*	1359	1403	1447*	1491*	1536	1580	1624*	4	9	13	18	22
981	1669	1713	1757*	1801*	1846	1890	1934*	1978*	2023	2067	4	9	13	18	22
982	2111	2155*	2199*	2244	2288	2332*	2376*	2420*	2465	2509	4	9	13	18	22
983	2553*	2597*	2641*	2686	2730	2774	2818*	2862*	2906*	2950*	4	9	13	18	22
984	2995	3039	3083	3127	3171*	3215*	3259*	3303*	3348	3392	4	9	13	18	22
985	3436	3480	3524	3568	3612*	3656*	3700*	3744*	3788*	3832*	4	9	13	18	22
986	3876*	3920*	3964*	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	4	9	13	18	22
987	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4712*	4	9	13	18	22
988	4756*	4800*	4844*	4888*	4932*	4976*	5020*	5064*	5108	5152	4	9	13	18	22
989	5196	5240	5284	5328	5371*	5415*	5459*	5503*	5547	5591	4	9	13	18	22
990	5635	5679	5722*	5766*	5810*	5854	5898	5942	5985*	6029*	4	9	13	18	22
991	6073*	6117	6161	6205	6248*	6292*	6336*	6380	6424	6467*	4	9	13	18	22
992	6511*	6555	6599	6642*	6686*	6730*	6774	6818	6861*	6905*	4	9	13	18	22
993	6949	6992*	7036*	7080	7124	7167*	7211*	7255	7298*	7342*	4	9	13	17	22
994	7386	7430	7473*	7517	7561	7604*	7648	7692	7735*	7779	4	9	13	17	22
995	7823	7866*	7910	7954	7997*	8041	8084*	8128*	8172	8215*	4	9	13	17	22
996	8259	8302*	8346*	8390	8433*	8477	8520*	8564	8608	8651*	4	9	13	17	22
997	8695	8738*	8782	8825*	8869	8912*	8956	8999*	9043	9087	4	9	13	17	22
998	9130*	9174	9217*	9261	9304*	9348	9391*	9435	9478*	9522	4	9	13	17	22
999	9565	9608*	9652	9695*	9739	9782*	9826	9869*	9913	9956*	4	9	13	17	22
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Таблица IX.2 предназначена для пользования десятичными логарифмами.

Любое положительное действительное число A можно записать в виде $A = a \cdot 10^k$, где $1 \leqslant a < 10$, k — целое; $\lg a$ — *мантисса*, а k — *характеристика* логарифма числа A.

Например,

$$245{,}7 = 2{,}457 \cdot 10^2, \qquad 0{,}0003854 = 3{,}854 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда

$$\lg 245{,}7 = \lg 2{,}457 + 2,$$

$$\lg 0{,}0003854 = \lg 3{,}854 - 4.$$

Поэтому в таблицы сводят только мантиссы. Числа можно брать в разных интервалах и с разным *шагом*. Например, от 1 до 10 с шагом 0,01, или 0,001, или 0,0001. Удобнее в таблице указывать числа от 100 до 999, от 1000 до 9999 и т.д.

Таблица IX.2 позволяет найти мантиссы логарифмов чисел от 1000 до 9999 *с шагом 1* и *с шестью значащими цифрами*. Значения всех мантисс располагаются между 0 и 1. Эта же таблица позволяет найти значения мантисс чисел от 10000 до 99999, если воспользоваться поправками, которые приведены в пяти правых столбцах таблицы.

Значения мантисс даны с шестью знаками после запятой. Все табличные значения, имеющие одинаковые первые две цифры после запятой, напечатаны поочередно на белом и на сером фоне. Все шесть знаков полностью даны один раз в первом и один раз в последнем столбце; при этом две первые цифры после запятой выделены жирным шрифтом и они одинаковы для всех значений, напечатанных на одном с ними фоне.

В таблицах содержатся *только верные* значащие цифры. Звездочка * означает, что при округлении последний знак числа нужно увеличить на 1.

Пример 4. Найти lg 2458.

Находим значение мантиссы на пересечении строки 245 и столбца с номером 8. Получим 0,390581*. Все значащие цифры — верные. Однако при округлении последнюю цифру нужно увеличить на 1. Характеристика логарифма числа 2458 равна 3.

Окончательно получим

$$\lg 2458 = 3{,}390582.$$

Пример 5. Найти lg 0,039548.

Характеристика логарифма равна −2. На пересечении строки 395 и столбца 5 найдем число 0,597146. Из этого значения нужно вычесть поправку, соответствующую столбцу поправок 2 и равную 22. Верные знаки для мантиссы логарифма будут 0,597125, а с учетом округления нужно было вычесть 22, т.е. получим 0,597124.

Таким образом,

$$\lg 0{,}039548 = -2 + 0{,}597124 = -1{,}402876.$$

Замечание. Когда характеристика логарифма отрицательна, приходится находить дополнение мантиссы до 1. Каждая цифра такого дополнения, кроме последней, дополняет соответствующую цифру мантиссы до 9, а последняя цифра дополняет последнюю цифру мантиссы до 10. Например,

$$-1 + 0{,}28793 = -0{,}71207.$$

Значение логарифма с отрицательной характеристикой иногда записывают, размещая минус над характеристикой. Например,

$$\overline{2}{,}597124 = -2 + 0{,}597124 = -1{,}402876.$$

Подобный прием в этих таблицах не применяется.

Таблица IX.3

ДЕСЯТИЧНЫЕ АНТИЛОГАРИФМЫ

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,0	1000000	0230	0460*	0691	0921	1151*	1382*	1613	1843*	1002074	23	46	69	92	115
,001	2305	2536	2766*	2997*	3228*	3459*	3690*	3922	4153	4384	23	46	69	92	116
,002	4615*	4847	5078*	5309*	5541*	5773	6004*	6236	6468	6699*	23	46	69	93	116
,003	6931*	7163*	7395	7627	7859*	8091*	8323*	8555*	8788	9020*	23	46	70	93	116
,004	9252*	9485	9717*	9950	0182*	0415*	0648	0880*	1113*	1011346*	23	47	70	93	116
,005	1011579	1812	2045	2278	2511*	2744*	2977*	3211	3444*	3677*	23	47	70	93	117
,006	3911	4144*	4378	4612	4845*	5079	5313	5546*	5780*	6014*	23	47	70	93	117
,007	6248*	6482*	6716*	6950*	7185	7419	7653*	7888	8122	8356*	23	47	70	94	117
,008	8591	8825*	9060*	9295	9529*	9764*	9999*	0234	0469	1020704	23	47	70	94	117
,009	1020939	1174*	1409*	1644*	1880	2115*	2350*	2586	2821*	3057	24	47	71	94	118
,01	3292*	3528*	3764	4000	4235*	4471*	4707*	4943*	5179*	5415*	24	47	71	94	118
,011	5651*	5888	6124	6360*	6597	6833	7069*	7306	7542*	7779*	24	47	71	95	118
,012	8016	8253	8489*	8726*	8963*	9200*	9437*	9674*	9911*	1030148*	24	47	71	95	118
,013	1030386	0623	0860*	1098	1335*	1573	1810*	2048	2285*	2523*	24	48	71	95	119
,014	2761	2999	3237	3475	3713	3951	4189	4427	4665*	4903*	24	48	71	95	119
,015	5142	5380*	5618*	5857	6096	6334*	6573	6811*	7050*	7289*	24	48	72	95	119
,016	7528	7767	8006	8245	8484	8723*	8962*	9202	9441	9680*	24	48	72	96	120
,017	9920	0159*	0399	0638*	0878	1118	1357*	1597*	1837*	1042077	24	48	72	96	120
,018	1042317	2557	2797*	3037*	3277*	3518	3758	3998*	4239	4479*	24	48	72	96	120
,019	4720	4960*	5201	5442	5682*	5923*	6164*	6405	6646	6887	24	48	72	96	120
,02	7128*	7369*	7610*	7852	8093	8334*	8576	8817*	9059	9300*	24	48	72	97	121
,021	9542	9784	0025*	0267*	0509*	0751	0993	1235	1477*	1051719*	24	48	73	97	121

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,022	**105**1961*	2204	2446	2688*	2931	3173*	3416	3658*	3901	4144	24	48	73	97	121
,023	4386*	4629*	4872*	5115	5358	5601*	5844*	6087*	6330*	6574	24	49	73	97	122
,024	6817*	7060*	7304	7547*	7791	8034*	8278*	8522	8766	9009*	24	49	73	97	122
,025	9253*	9497*	9741*	9985*	0229*	0473*	0718	0962	1206*	**106**1451	24	49	73	98	122
,026	**106**1695*	1940	2184*	2429	2673*	2918*	3163	3408	3653	3898	24	49	73	98	122
,027	4143	4388	4633	4878	5123*	5368*	5614	5859*	6105	6350*	25	49	74	98	123
,028	6596	6841*	7087	7333	7578*	7824*	8070*	8316*	8562*	8808*	25	49	74	98	123
,029	9054*	9301	9547	9793*	0039*	0286	0532*	0779	1025*	**107**1272*	25	49	74	99	123
,03	**107**1519	1766	2012*	2259*	2506*	2753*	3000*	3247*	3494*	3742	25	49	74	99	123
,031	3989	4236*	4484	4731*	4979	5226*	5474	5721*	5969*	6217	25	50	74	99	124
,032	6465	6713	6961	7209	7457	7705	7953	8201*	8449*	8698	25	50	74	99	124
,033	8946*	9195	9443*	9692	9940*	0189*	0438	0687	0936	**108**1184*	25	50	75	99	124
,034	**108**1433*	1682*	1932	2181	2430	2679*	2929	3178	3427*	3677	25	50	75	100	125
,035	3926*	4176*	4426	4675*	4925*	5175*	5425	5675	5925	6175	25	50	75	100	125
,036	6425*	6675*	6926	7176	7426*	7677	7927*	8178	8428*	8679	25	50	75	100	125
,037	8930	9180*	9431*	9682*	9933	0184	0435*	0686*	0937*	**109**1189	25	50	75	100	125
,038	**109**1440	1691*	1943	2194*	2446	2697*	2949	3200*	3452*	3704*	25	50	75	101	126
,039	3956	4208	4460	4712	4964	5216*	5468*	5721	5973	6225*	25	50	76	101	126
,04	6478	6730*	6983	7235*	7488*	7741	7994	8246*	8499*	8752*	25	51	76	101	126
,041	9005*	9258*	9512	9765	0018*	0271*	0525	0778*	1032	**110**1285*	25	51	76	101	127
,042	**110**1539	1792*	2046*	2300	2554	2808	3062	3316	3570	3824	25	51	76	102	127
,043	4078*	4332*	4587	4841*	5095*	5350	5605	5859*	6114	6369	25	51	76	102	127
,044	6623*	6878*	7133*	7388	7643	7898*	8153*	8408*	8664	8919	26	51	77	102	128
,045	9174*	9430	9685*	9941	0196*	0452*	0708	0964	1219*	**111**1475*	26	51	77	102	128
,046	**111**1731*	1987*	2243*	2499*	2756	3012	3268*	3525	3781*	4037*	26	51	77	103	128
,047	4294*	4551	4807*	5064*	5321	5578	5835	6092	6349	6606	26	51	77	103	128
,048	6863	7120	7377*	7635	7892	8149*	8407	8664*	8922	9180	26	51	77	103	129

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
,049	9437*	9695*	9953*	0211	0469	0727	0985*	1243*	1501*	**112**1760	26	52	77	103	129
,05	**112**2018	2276*	2535	2793*	3052	3310*	3569*	3828	4087	4346	26	52	78	103	129
,051	4604*	4863*	5122*	5382	5641	5900	6159*	6419	6678	6937*	26	52	78	104	130
,052	7197	7457	7716*	7976	8236	8495*	8755*	9015*	9275*	9535*	26	52	78	104	130
,053	9795*	0056	0316	0576*	0836*	1097	1357*	1618	1878*	**113**2139*	26	52	78	104	130
,054	**113**2400	2661	2921*	3182*	3443*	3704*	3965*	4227	4488	4749	26	52	78	104	131
,055	5010*	5272	5533*	5795	6056*	6318	6579*	6841*	7103*	7365	26	52	78	105	131
,056	7627	7889	8151	8413	8675*	8937*	9200	9462	9724*	9987	26	52	79	105	131
,057	**114**0249*	0512	0775	1037*	1300	1563	1826	2089	2352	2615	26	53	79	105	131
,058	2878	3141*	3404*	3668	3931	4194*	4458	4721*	4985*	5249	26	53	79	105	132
,059	5512*	5776*	6040*	6304*	6568	6832*	7096*	7360*	7624*	7889	26	53	79	106	132
,06	8153*	8418	8682	8947	9211*	9476	9740*	0005*	0270*	**115**0535	26	53	79	106	132
,061	**115**0800	1065	1330	1595*	1860*	2126	2391	2656*	2922	3187*	27	53	80	106	133
,062	3453	3718*	3984*	4250	4516	4781*	5047*	5313*	5579*	5846	27	53	80	106	133
,063	6112	6378	6644*	6911	7177*	7444	7710*	7977	8243*	8510*	27	53	80	107	133
,064	8777	9044	9311	9578	9845	0112	0379	0646*	0913*	**116**1181	27	53	80	107	134
,065	**116**1448*	1716	1983*	2251	2518*	2786*	3054	3322	3590	3858	27	54	80	107	134
,066	4126	4394	4662	4930	5198*	5467	5735	6003*	6272	6540*	27	54	80	107	134
,067	6809*	7078	7347	7615*	7884*	8153*	8422*	8691*	8960*	9230	27	54	81	108	134
,068	9499	9768*	0038	0307*	0577	0846*	1116	1385*	1655*	**117**1925	27	54	81	108	135
,069	**117**2195	2465	2735	3005	3275	3545*	3815*	4086	4356*	4627	27	54	81	108	135

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,07	4897*	5168	5438*	5709	5980	6250*	6521*	6792*	7063*	7334*	27	54	81	108	135
,071	7605*	7877	8148	8419*	8691	8962*	9234	9505*	9777	**118**0048*	27	54	81	109	136
,072	**118**0320*	0592	0864	1136	1408	1680	1952	2224*	2496*	2769	27	54	82	109	136
,073	3041*	3313*	3586	3859	4131*	4404	4677	4949*	5222*	5495*	27	55	82	109	136
,074	5768*	6041*	6314*	6588	6861	7134*	7408	7681*	7955	8228*	27	55	82	109	137
,075	8502	8775*	9049*	9323	9597	9871	0145	0419	0693*	**119**0967*	27	55	82	110	137
,076	**119**1242	1516	1790*	2065	2339*	2614	2888*	3163*	3438	3713	27	55	82	110	137
,077	3988	4263	4538	4813	5088	5363*	5638*	5914	6189*	6465	28	55	83	110	138
,078	6740*	7016	7291*	7567	7843	8119	8395	8671	8947	9223	28	55	83	110	138
,079	9499	9775*	0051*	0328	0604*	0881	1157*	1434	1710*	**120**1987*	28	55	83	111	138
,08	**120**2264	2541	2818	3095	3372	3649	3926*	4203*	4481	4758*	28	55	83	111	139
,081	5035*	5313	5591	5868*	6146	6424	6701*	6979*	7257*	7535*	28	56	83	111	139
,082	7813*	8091*	8370	8648	8926*	9205	9483*	9762	0040*	**121**0319	28	56	84	111	139
,083	**121**0598	0876*	1155*	1434*	1713*	1992*	2271*	2550*	2830	3109	28	56	84	112	140
,084	3388*	3668	3947*	4227	4506*	4786*	5066	5346	5626	5905*	28	56	84	112	140
,085	6186	6466	6746	7026	7306*	7586*	7867	8147*	8428	8708*	28	56	84	112	140
,086	8989*	9270	9551	9831*	0112*	0393*	0674*	0955*	1237	**122**1518	28	56	84	112	140
,087	**122**1799*	2081	2362	2643*	2925	3207	3488*	3770*	4052	4334	28	56	84	113	141
,088	4616	4898	5180	5462	5744*	6026*	6309	6591*	6874	7156*	28	56	85	113	141
,089	7439	7721*	8004*	8287	8570	8853	9136	9419	9702	9985*	28	57	85	113	141
,09	**123**0268*	552	835	1118*	1402	1685*	1969*	2253	2537	2820*	28	57	85	113	142
,091	3104*	3388*	3672*	3956*	4241	4525	4809*	5093*	5378	5662*	28	57	85	114	142
,092	5947	6232	6516*	6801	7086	7371	7656	7941	8226	8511	28	57	85	114	142
,093	8796*	9081*	9367	9652*	9938	0223*	0509	0794*	1080*	**124**1366	29	57	86	114	143
,094	**124**1652	1938	2224	2510	2796	3082*	3368*	3655	3941*	4228	29	57	86	114	143

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,095	4514*	4801	5087*	5374*	5661	5948	6235	6522	6809	7096	29	57	86	115	143
,096	7383*	7670*	7958	8245	8532*	8820	9108	9395*	9683	9971	29	58	86	115	144
,097	**125**0259	0546*	0834*	1122*	1411	1699	1987*	2275*	2564	2852*	29	58	86	115	144
,098	3141	3429*	3718	4007	4295*	4584*	4873*	5162*	5451*	5740*	29	58	87	116	144
,099	6029*	6319	6608*	6897*	7187	7476*	7766	8056	8345*	8635*	29	58	87	116	145
,1	8925	9215	9505	9795	0085	0375*	0665*	0956	1246*	**126**1537	29	58	87	116	145
,101	**126**1827*	2118	2408*	2699	2990	3281	3572	3863	4154	4445	29	58	87	116	145
,102	4736	5027*	5318*	5610	5901*	6193	6484*	6776*	7068	7360	29	58	87	117	146
,103	7651*	7943*	8235*	8527*	8819*	9112	9404	9696*	9989	**127**0281*	29	58	88	117	146
,104	**127**0574	0866*	1159	1452	1744*	2037*	2330*	2623*	2916*	3209*	29	59	88	117	146
,105	3503	3796	4089*	4383	4676*	4970	5263*	5557	5851	6144*	29	59	88	117	147
,106	6438*	6732*	7026*	7320*	7614*	7909	8203	8497*	8792	9086*	29	59	88	118	147
,107	9381	9675*	9970*	0265	0560	0855	1150	1445	1740	**128**2035	29	59	88	118	147
,108	**128**2330*	2625*	2921	3216*	3512	3807*	4103	4399	4694*	4990*	30	59	89	118	148
,109	5286*	5582*	5878*	6174*	6470*	6767	7063*	7359*	7656	7952*	30	59	89	119	148
,11	8249*	8546	8842*	9139*	9436*	9733*	0030*	0327*	0624*	**129**0921*	30	59	89	119	148
,111	**129**1219	1516*	1814	2111*	2409	2706*	3004	3302	3599*	3897*	30	60	89	119	149
,112	4195*	4493*	4791*	5090	5388	5686*	5985	6283*	6582	6880*	30	60	89	119	149
,113	7179	7477*	7776*	8075*	8374*	8673*	8972*	9271*	9570*	9870	30	60	90	120	149
,114	**130**0169*	0468*	0768	1068	1367*	1667	1967	2266*	2566*	2866*	30	60	90	120	150
,115	3166*	3466*	3767	4067	4367*	4667*	4968	5268*	5569*	5870	30	60	90	120	150

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,116	6170*	6471*	6772*	7073	7374	7675*	7976*	8277*	8579	8880*	30	60	90	120	151
,117	9181*	9483	9784*	0086*	0388	0690	0991*	1293*	1595*	1311897*	30	60	91	121	151
,118	1312199*	2502	2804	3106*	3409	3711	4014	4316*	4619	4922	30	60	91	121	151
,119	5224*	5527*	5830*	6133*	6436*	6739*	7043	7346	7649*	7953	30	61	91	121	152
,12	8256*	8560	8863*	9167*	9471	9775	0079	0383	0687	1320991	30	61	91	122	152
,121	1321295*	1599*	1904	2208*	2513	2817*	3122	3427	3731*	4036*	30	61	91	122	152
,122	4341*	4646*	4951*	5256*	5561*	5867	6172	6477*	6783	7088*	31	61	92	122	153
,123	7394	7700	8005*	8311*	8617*	8923*	9229*	9535*	9841*	1330148	31	61	92	122	153
,124	1330454	0760*	1067	1373*	1680	1987	2293*	2600*	2907	3214	31	61	92	123	153
,125	3521	3828*	4135*	4442*	4750	5057*	5365	5672*	5980	6287*	31	61	92	123	154
,126	6595*	6903	7211	7519	7827	8135	8443	8751*	9059*	9368	31	62	92	123	154
,127	9676*	9985	0293*	0602	0911	1219*	1528*	1837*	2146*	1342455*	31	62	93	124	154
,128	1342764*	3074	3383	3692*	4002	4311*	4621	4930*	5240*	5550	31	62	93	124	155
,129	5860	6170	6480	6790	7100*	7410*	7721	8031	8341*	8652	31	62	93	124	155
,13	8962*	9273*	9584	9895	0205*	0516*	0827*	1138*	1450	1351761	31	62	93	124	155
,131	1352072*	2383*	2695	3006*	3318	3630	3941*	4253*	4565	4877	31	62	93	125	156
,132	5189	5501	5813*	6125*	6438	6750*	7062*	7375	7688	8000*	31	62	94	125	156
,133	8313	8626	8939	9252	9565	9878	0191	0504*	0817*	1361131	31	63	94	125	157
,134	1361444*	1758	2071*	2385	2699	3013	3326*	3640*	3954*	4268*	31	63	94	126	157
,135	4583	4897	5211*	5526	5840*	6155	6469*	6784	7099	7413*	31	63	94	126	157
,136	7728*	8043*	8358*	8673*	8989	9304	9619*	9935	0250*	1370566	32	63	95	126	158
,137	1370881*	1197	1513	1829	2144*	2460*	2777	3093	3409	3725*	32	63	95	126	158
,138	4041*	4358	4674*	4991	5308	5624*	5941*	6258	6575	6892	32	63	95	127	158
,139	7209	7526*	7843*	8161	8478*	8795*	9113	9431	9748*	1380066	32	63	95	127	159
,14	1380384	0702	1020	1338	1656	1974	2292*	2610*	2929	3247*	32	64	95	127	159

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,141	3566	3884*	4203*	4522	4841	5160	5479	5798	6117	6436*	32	64	96	128	159
,142	6755*	7075	7394*	7714	8033*	8353	8673	8992*	9312*	9632*	32	64	96	128	160
,143	9952*	0272*	0592*	0913	1233	1553*	1874	2194*	2515	**139**2836	32	64	96	128	160
,144	**139**3156*	3477*	3798*	4119	4440*	4761*	5082*	5404	5725	6046*	32	64	96	128	161
,145	6368	6689*	7011*	7333	7655	7976*	8298*	8620*	8942*	9265	32	64	97	129	161
,146	9587	9909*	0232	0554	0876*	1199*	1522	1845	2167*	**140**2490*	32	65	97	129	161
,147	**140**2813*	3136*	3459*	3783	4106	4429*	4753	5076*	5400	5723*	32	65	97	129	162
,148	6047*	6371	6695	7019	7343	7667	7991	8315*	8639*	8964	32	65	97	130	162
,149	9288*	9613	9937*	0262*	0587	0912	1237	1562	1887	**141**2212	32	65	97	130	162
,15	**141**2537*	2862*	3188	3513*	3839	4164*	4490	4816	5141*	5467*	33	65	98	130	163
,151	5793*	6119*	6445*	6772	7098	7424*	7751	8077*	8404	8730*	33	65	98	131	163
,152	9057*	9384	9711	0038	0365	0692	1019	1346*	1673*	**142**2001	33	65	98	131	164
,153	**142**2328*	2656	2983*	3311*	3639	3967	4295	4623	4951	5279	33	66	98	131	164
,154	5607*	5935*	6264	6592*	6921	7249*	7578*	7907	8236	8564*	33	66	99	131	164
,155	8893*	9223	9552	9881	0210*	0539*	0869	1198*	1528*	**143**1858	33	66	99	132	165
,156	**143**2187*	2517*	2847*	3177*	3507*	3837*	4167*	4498	4828*	5158*	33	66	99	132	165
,157	5489	5820	6150*	6481	6812	7143	7474	7805	8136	8467	33	66	99	132	165
,158	8798*	9129*	9461	9792*	0124	0456	0787*	1119*	1451	**144**1783	33	66	99	133	166
,159	**144**2115	2447	2779*	3111*	3444	3776*	4109	4441*	4774	5106*	33	66	100	133	166
,16	5439*	5772*	6105*	6438*	6771*	7104*	7438	7771	8104*	8438	33	67	100	133	167
,161	8771*	9105	9439	9772*	0106*	0440*	0774*	1108*	1443	**145**1777	33	67	100	134	167

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,162	1452111*	2446	2780	3115	3449*	3784	4119	4454	4788*	5123*	33	67	100	134	167
,163	5459	5794	6129	6464*	6800	7135*	7471	7806*	8142*	8478	34	67	101	134	168
,164	8814	9150	9486	9822	0158	0494*	0831	1167	1503*	1461840*	34	67	101	135	168
,165	1462177	2513*	2850*	3187*	3524*	3861*	4198*	4535*	4873	5210	34	67	101	135	169
,166	5547*	5885	6222*	6560*	6898	7236	7573*	7911*	8249*	8588	34	68	101	135	169
,167	8926	9264*	9602*	9941	0279*	0618	0957	1295*	1634*	1471973*	34	68	102	135	169
,168	1472312*	2651*	2990*	3329*	3669	4008*	4347*	4687*	5027	5366*	34	68	102	136	170
,169	5706*	6046	6386	6726	7066	7406	7746*	8087	8427	8767*	34	68	102	136	170
,17	9108	9449	9789*	0130	0471	0812	1153	1494	1835*	1482176*	34	68	102	136	170
,171	1482518	2859	3200*	3542*	3884	4225*	4567*	4909*	5251*	5593*	34	68	103	137	171
,172	5935*	6277*	6620	6962	7304*	7647	7989*	8332*	8675	9018	34	69	103	137	171
,173	9361	9704	0047	0390	0733	1076*	1420	1763*	2107	1492450*	34	69	103	137	172
,174	1492794	3138	3482	3825*	4169*	4514	4858	5202	5546*	5891	34	69	103	138	172
,175	6235*	6580	6924*	7269*	7614	7959	8304	8649	8994	9339*	34	69	103	138	172
,176	9684*	0030	0375*	0721	1066*	1412	1758	2103*	2449*	1502795*	35	69	104	138	173
,177	1503141*	3488	3834	4180*	4527	4873*	5220	5566*	5913	6260	35	69	104	139	173
,178	6607	6954	7301	7648	7995	8342*	8689*	9037	9384*	9732	35	69	104	139	174
,179	1510080	0427*	0775*	1123*	1471*	1819*	2167*	2516	2864	3212*	35	70	104	139	174
,18	3561	3909*	4258	4607	4955*	5304*	5653*	6002*	6351*	6701	35	70	105	140	174
,181	7050	7399*	7749	8098*	8448	8797*	9147*	9497*	9847	1520197	35	70	105	140	175
,182	1520547*	0897*	1247*	1598	1948*	2299	2649*	3000	3351	3701*	35	70	105	140	175
,183	4052*	4403*	4754*	5105*	5457	5808	6159*	6511	6862*	7214	35	70	105	141	176
,184	7566	7917*	8269*	8621*	8973*	9325*	9677*	0030	0382*	1530734*	35	70	106	141	176
,185	1531087	1440	1792*	2145	2498	2851	3204	3557	3910	4263*	35	71	106	141	176
,186	4616*	4970	5323*	5677	6031	6384*	6738*	7092	7446	7800*	35	71	106	141	177

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,187	8154*	8508*	8863	9217*	9571*	9926*	0281	0635*	0990*	1541345*	35	71	106	142	177
,188	1541700	2055	2410*	2765*	3121	3476	3831*	4187	4542*	4898*	36	71	107	142	178
,189	5254	5610	5966	6322	6678	7034*	7390*	7747	8103*	8460	36	71	107	142	178
,19	8816*	9173	9530	9886*	0243*	0600*	0957*	1315	1672	1552029*	36	71	107	143	178
,191	1552387	2744*	3102	3459*	3817	4175	4533	4891	5249	5607	36	72	107	143	179
,192	5965*	6323*	6682	7040*	7399	7758	8116*	8475*	8834	9193	36	72	108	143	179
,193	9552*	9911*	0270*	0630	0989*	1349	1708*	2068	2427*	1562787*	36	72	108	144	180
,194	1563147*	3507*	3867*	4227*	4588	4948	5308*	5669	6029*	6390	36	72	108	144	180
,195	6751	7111*	7472*	7833*	8194*	8555*	8917	9278	9639*	1570001	36	72	108	144	181
,196	1570362*	724	1086	1447*	1809*	2171*	2533*	2895*	3258	3620	36	72	109	145	181
,197	3982*	4345	4707*	5070*	5433	5796	6158*	6521*	6884*	7248	36	73	109	145	181
,198	7611	7974*	8337*	8701	9064*	9428*	9792	0156	0520	1580883*	36	73	109	145	182
,199	1581248	1612	1976	2340*	2705	3069*	3434	3798*	4163	4528	36	73	109	146	182
,2	4893	5258	5623	5988	6353*	6718*	7084	7449*	7815	8181	37	73	110	146	183
,201	8546*	8912*	9278	9644	0010*	0376*	0742*	1109	1475*	1591842	37	73	110	146	183
,202	1592208*	2575	2942	3308*	3675*	4042*	4409*	4777	5144	5511*	37	73	110	147	183
,203	5879	6246*	6614	6981*	7349*	7717*	8085	8453	8821*	9189*	37	74	110	147	184
,204	9558	9926	0294*	0663	1031*	1400*	1769	2138	2507	1602876	37	74	111	147	184
,205	1603245	3614*	3983*	4353	4722*	5092	5461*	5831*	6201	6571	37	74	111	148	185
,206	6941	7311	7681	8051*	8421*	8792	9162*	9533	9904	1610274*	37	74	111	148	185
,207	1610645*	1016*	1387*	1758*	2129*	2501	2872	3243*	3615	3986*	37	74	111	148	186

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,208	4358*	4730	5102	5474	5846	6218	6590	6962*	7335	7707*	37	74	112	149	186
,209	8080	8452*	8825	9198	9571	9943*	0317	0690	1063	**162**1436*	37	75	112	149	186
,21	**162**1810	2183*	2557	2930*	3304*	3678	4052	4426	4800	5174*	37	75	112	150	187
,211	5548*	5923	6297*	6672	7046*	7421	7796	8170*	8545*	8920*	37	75	112	150	187
,212	9296	9671	0046*	0421*	0797	1172*	1548*	1924	2300	**163**2675*	38	75	113	150	188
,213	**163**3051*	3428	3804	4180	4556*	4933	5309*	5686	6062*	6439*	38	75	113	151	188
,214	6816*	7193	7570	7947*	8324*	8702	9079	9456*	9834	**164**0212	38	75	113	151	189
,215	**164**0589*	0967*	1345	1723	2101*	2479*	2857*	3236	3614*	3993	38	76	113	151	189
,216	4371*	4750	5129	5508	5886*	6265*	6645	7024	7403*	7782*	38	76	114	152	190
,217	8162	8541*	8921*	9301	9681	0061	0440*	0821	1201	**165**1581	38	76	114	152	190
,218	**165**1961*	2342	2722*	3103	3484	3864*	4245*	4626*	5007*	5388*	38	76	114	152	190
,219	5769*	6151	6532*	6914	7295*	7677	8059	8440*	8822*	9204*	38	76	114	153	191
,22	9586*	9969	0351	0733*	1116	1498*	1881	2264	2646*	**166**3029*	38	77	115	153	191
,221	**166**3412*	3795*	4178*	4562	4945	5328*	5712	6095*	6479*	6863	38	77	115	153	192
,222	7247	7631	8015	8399	8783*	9167*	9552	9936*	0321	**167**0705*	38	77	115	154	192
,223	**167**1090*	1475	1860	2245	2630	3015*	3400*	3786	4171*	4557	39	77	116	154	193
,224	4942*	5328*	5714	6100	6486	6872	7258	7644*	8031	8417*	39	77	116	154	193
,225	8804	9190*	9577	9964	0350*	0737*	1124*	1512	1899	**168**2286*	39	77	116	155	193
,226	**168**2674	3061*	3449	3836*	4224*	4612	5000	5388	5776*	6164*	39	78	116	155	194
,227	6553	6941	7329*	7718	8107	8495*	8884*	9273*	9662*	**169**0051*	39	78	117	155	194
,228	**169**0440*	0830	1219*	1609	1998*	2388	2777*	3167*	3557*	3947*	39	78	117	156	195
,229	4337*	4727*	5118	5508*	5899	6289*	6680	7070*	7461*	7852*	39	78	117	156	195
,23	8243*	8634*	9025*	9417	9808*	0199*	0591	0983	1374*	**170**1766*	39	78	117	157	196
,231	**170**2158*	2550	2942*	3334*	3726*	4119	4511*	4904	5296*	5689*	39	78	118	157	196
,232	6082	6475	6868	7261	7654	8047*	8441	8834	9228	9621*	39	79	118	157	197

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,233	1710015	0409	0802*	1196*	1591	1985	2379	2773*	3168	3562*	39	79	118	158	197
,234	3957	4352	4746*	5141*	5536*	5931*	6326*	6722	7117	7512*	40	79	119	158	198
,235	7908	8303*	8699*	9095	9491	9887	0283	0679*	1075*	1721472	40	79	119	158	198
,236	1721868*	2265	2661*	3058	3455	3852	4249	4646	5043	5440*	40	79	119	159	198
,237	5837*	6235	6632*	7030	7428	7825*	8223*	8621*	9019*	9418	40	80	119	159	199
,238	9816	0214*	0613	1011*	1410	1809	2207*	2606*	3005*	1733404*	40	80	120	159	199
,239	1733803*	4203	4602*	5002	5401*	5801	6200*	6600*	7000*	7400*	40	80	120	160	200
,24	7800*	8201	8601	9001*	9402	9802*	0203	0604	1004*	1741405*	40	80	120	160	200
,241	1741806*	2207*	2609	3010	3411*	3813	4214*	4616*	5018	5420	40	80	120	161	201
,242	5822	6224	6626	7028*	7430*	7833	8235*	8638	9041	9443*	40	80	121	161	201
,243	9846*	0249*	0652*	1055*	1459	1862	2265*	2669	3072*	1753476*	40	81	121	161	202
,244	1753880*	4284	4688	5092	5496*	5900*	6305	6709*	7114	7518*	40	81	121	162	202
,245	7923*	8328	8733	9138	9543	9948*	0353*	0759	1164*	1761570	41	81	122	162	203
,246	1761976	2381*	2787*	3193*	3599*	4005*	4411*	4818	5224*	5631	41	81	122	162	203
,247	6037*	6444*	6851	7258	7665	8072	8479	8886*	9293*	9701	41	81	122	163	204
,248	1770108*	0516*	0924	1332	1740	2148	2556	2964	3372*	3781	41	82	122	163	204
,249	4189	4598	5006*	5415	5824	6233	6642	7051	7460*	7869*	41	82	123	164	204
,25	8279	8688*	9098*	9508	9918	0327*	0737*	1147*	1558	1781968	41	82	123	164	205
,251	1782378*	2789	3199*	3610	4021	4431*	4842*	5253*	5665	6076	41	82	123	164	205
,252	6487*	6898*	7310	7722	8133*	8545*	8957	9369	9781	1790193*	41	82	124	165	206
,253	1790605*	1018	1430*	1843	2255*	2668*	3081	3494	3907	4320	41	83	124	165	206

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,254	4733*	5146*	5560	5973*	6387	6801	7214*	7628*	8042*	8456*	41	83	124	165	207
,255	8870*	9285	9699*	0113*	0528	0943	1357*	1772*	2187*	**180**2602*	41	83	124	166	207
,256	**180**3017*	3432*	3848	4263*	4679	5094*	5510	5926	6342	6758	42	83	125	166	208
,257	7174	7590	8006*	8422*	8839	9255*	9672*	0089	0506	**181**0923	42	83	125	167	208
,258	**181**1340	1757	2174	2591*	3009	3426*	3844	4261*	4679*	5097*	42	84	125	167	209
,259	5515*	5933*	6351*	6770	7188*	7607	8025*	8444	8863	9281*	42	84	126	167	209
,26	9700*	0119*	0539	0958	1377*	1797	2216*	2636	3055*	**182**3475*	42	84	126	168	210
,261	**182**3895*	4315*	4735*	5156	5576	5996*	6417	6837*	7258*	7679	42	84	126	168	210
,262	8100	8521	8942	9363	9784*	0206	0627*	1049	1470*	**183**1892*	42	84	126	169	211
,263	**183**2314	2736	3158	3580*	4002*	4425	4847*	5270	5692*	6115*	42	84	127	169	211
,264	6538	6961	7384	7807	8230*	8653*	9077	9500*	9924	**184**0348	42	85	127	169	212
,265	**184**0772	1195*	1619*	2044	2468	2892	3316*	3741	4165*	4590*	42	85	127	170	212
,266	5015	5440	5865	6290	6715*	7140*	7566	7991*	8417	8842*	43	85	128	170	213
,267	9268*	9694	0120	0546	0972*	1398*	1825	2251*	2678	**185**3104*	43	85	128	171	213
,268	**185**3531*	3958	4385	4812	5239*	5666*	6094	6521*	6949	7376*	43	85	128	171	214
,269	7804	8232	8660	9088	9516	9944*	0372*	0801	1229*	**186**1658	43	86	128	171	214
,27	**186**2087	2515*	2944*	3373*	3802*	4232	4661	5090*	5520	5949*	43	86	129	172	215
,271	6379*	6809	7239	7669	8099	8529*	8959*	9390	9820*	**187**0251	43	86	129	172	215
,272	**187**0682	1112*	1543*	1974*	2405*	2837	3268	3699*	4131	4562*	43	86	129	172	216
,273	4994*	5426	5858	6290	6722	7154	7586*	8019	8451*	8884	43	86	130	173	216
,274	9316*	9749*	0182	0615	1048*	1481*	1914*	2348	2781*	**188**3215	43	87	130	173	217
,275	**188**3649	4082*	4516*	4950*	5384*	5818*	6253	6687*	7122	7556*	43	87	130	174	217
,276	7991	8426	8861	9295*	9731	0166	0601*	1036*	1472	**189**1907*	44	87	131	174	218
,277	**189**2343*	2779	3215	3651	4087	4523*	4959*	5396	5832*	6269	44	87	131	174	218
,278	6705*	7142*	7579*	8016*	8453*	8890*	9328	9765*	0203	**190**0640*	44	87	131	175	219

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,279	**19**01078	1516	1953*	2391*	2830	3268	3706*	4144*	4583	5022	44	88	131	175	219
,28	5460*	5899*	6338	6777	7216*	7655*	8095	8534	8973*	9413*	44	88	132	176	220
,281	9853	0293	0732*	1172*	1613	2053	2493*	2934	3374*	**19**13815	44	88	132	176	220
,282	**19**14255*	4696*	5137*	5578*	6019*	6461	6902	7343*	7785	8227	44	88	132	176	221
,283	8668*	9110*	9552*	9994*	0436*	0878*	1321	1763*	2206	**19**22648*	44	88	133	177	221
,284	**19**23091*	3534*	3977*	4420*	4863*	5307	5750	6193*	6637	7081	44	89	133	177	222
,285	7524*	7968*	8412*	8856*	9301	9745	0189*	0634	1078*	**19**31523*	44	89	133	178	222
,286	**19**31968	2413	2858	3303	3748*	4193*	4639	5084*	5530	5976	45	89	134	178	223
,287	6421*	6867*	7313*	7760	8206	8652*	9099	9545*	9992	**19**40439	45	89	134	179	223
,288	**19**40885*	1332*	1779*	2227	2674	3121*	3569	4016*	4464	4912	45	89	134	179	224
,289	5360	5808	6256	6704	7152*	7601	8049*	8498	8946*	9395*	45	90	135	179	224
,29	9844*	0293*	0742*	1191*	1641	2090*	2540	2989*	3439*	**19**53889*	45	90	135	180	225
,291	**19**54339	4789*	5239*	5689*	6140	6590*	7041	7492	7942*	8393*	45	90	135	180	225
,292	8844*	9295*	9746*	0198	0649*	1101	1552*	2004*	2456	**19**62908	45	90	135	181	226
,293	**19**63360	3812	4264*	4716*	5169	5621*	6074*	6527	6980	7433	45	91	136	181	226
,294	7886	8339	8792*	9246	9699*	0153	0606*	1060*	1514*	**19**71968*	45	91	136	181	227
,295	**19**72422*	2876*	3331	3785*	4240	4694*	5149*	5604	6059	6514	45	91	136	182	227
,296	6969*	7424*	7880	8335*	8791	9247	9702*	0158*	0614*	**19**81070*	46	91	137	182	228
,297	**19**81527	1983	2439*	2896	3352*	3809*	4266	4723	5180	5637*	46	91	137	183	228
,298	6094*	6552	7009*	7467	7925	8382*	8840*	9298*	9756*	**19**90215	46	92	137	183	229
,299	**19**90673	1131*	1590	2048*	2507*	2966*	3425	3884*	4343*	4802*	46	92	138	184	229

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,3	5262	5721*	6181	6641	7100*	7560*	8020*	8480*	8941	9401	46	92	138	184	230
,301	9861*	0322	0783	1243*	1704*	2165*	2626*	3087*	3549	2004010*	46	92	138	184	230
,302	2004472	4933*	5395	5857	6319	6781	7243	7705	8167*	8630	46	92	139	185	231
,303	9092*	9555	0018	0481	0944	1407	1870	2333*	2797	2013260*	46	93	139	185	232
,304	2013724	4187*	4651*	5115*	5579*	6043*	6508	6972*	7437	7901*	46	93	139	186	232
,305	8366	8831	9296	9761	0226	0691	1156*	1622	2087*	2022553	47	93	140	186	233
,306	2023019	3485	3951	4417	4883	5349*	5816	6282*	6749	7215*	47	93	140	187	233
,307	7682*	8149*	8616*	9083*	9551	0018*	0486	0953*	1421	2031889	47	93	140	187	234
,308	2032357	2825	3293	3761	4229*	4698	5166*	5635	6104	6573	47	94	141	187	234
,309	7042	7511	7980	8449*	8919	9388*	9858	0328	0797*	2041267*	47	94	141	188	235
,31	2041737*	2208	2678	3148*	3619	4089*	4560*	5031	5502	5973	47	94	141	188	235
,311	6444*	6915*	7387	7858*	8330	8802	9273*	9745*	0217*	2050689*	47	94	142	189	236
,312	2051162	1634*	2106*	2579*	3052	3525	3997*	4470*	4944	5417	47	95	142	189	236
,313	5890*	6364	6837*	7311	7785	8258*	8732*	9206*	9681	2060155	47	95	142	190	237
,314	2060629*	1104	1579	2053*	2528*	3003*	3478*	3953*	4429	4904*	47	95	142	190	237
,315	5380	5855*	6331*	6807	7283	7759	8235*	8711*	9188	9664*	48	95	143	190	238
,316	2070141	0618	1094*	1571*	2048*	2526	3003	3480*	3958	4435*	48	95	143	191	239
,317	4913*	5391	5869	6347	6825	7303*	7782	8260*	8739	9217*	48	96	143	191	239
,318	9696*	0175*	0654*	1133*	1613	2092	2571*	3051	3531	2084010*	48	96	144	192	240
,319	2084490*	4970*	5451	5931	6411*	6892	7372*	7853	8334	8815	48	96	144	192	240
,32	9296	9777	0258*	0739*	1221	1702*	2184*	2666	3148	2093630	48	96	144	193	241
,321	2094112	4594*	5077	5559*	6042	6524*	7007*	7490	7973*	8456*	48	97	145	193	241
,322	8939*	9423	9906*	0390	0873*	1357*	1841*	2325*	2809*	2103294	48	97	145	194	242
,323	2103778	4262*	4747	5232	5716*	6201*	6686*	7172	7657	8142*	48	97	145	194	242
,324	8628	9113*	9599	0085	0571	1057	1543	2029*	2515*	2113002	49	97	146	194	243

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,325	**21**13489	3975*	4462*	4949	5436*	5923*	6410*	6898	7385*	7873	49	97	146	195	244
,326	8361	8848*	9336*	9824*	0313	0801	1289*	1778	2266*	**21**22755*	49	98	146	195	244
,327	**21**23244	3733	4222	4711*	5200*	5690	6179*	6669	7159	7649	49	98	147	196	245
,328	8139	8629	9119	9609*	0100	0590*	1081	1571*	2062*	**21**32553*	49	98	147	196	245
,329	**21**33044*	3536	4027	4518*	5010	5502	5993*	6485*	6977*	7469*	49	98	147	197	246
,33	7962	8454	8946*	9439	9932	0424*	0917*	1410*	1903*	**21**42397	49	99	148	197	246
,331	**21**42890*	3384	3877*	4371	4865	5359	5853	6347	6841*	7335*	49	99	148	198	247
,332	7830	8325	8819*	9314*	9809*	0304*	0799*	1295	1790*	**21**52286	50	99	149	198	248
,333	**21**52781*	3277	3773	4269	4765	5261*	5757*	6254	6750*	7247*	50	99	149	198	248
,334	7744	8241	8738	9235	9732*	0230	0727*	1225	1722*	**21**62220*	50	99	149	199	249
,335	**21**62718*	3216*	3714*	4212*	4711	5209*	5708	6207	6706	7205	50	100	150	199	249
,336	7704	8203	8702*	9202	9701*	0201	0700*	1200*	1700*	**21**72200*	50	100	150	200	250
,337	**21**72701	3201*	3701*	4202*	4703	5204	5704*	6205*	6707	7208	50	100	150	200	250
,338	7709*	8211	8712*	9214*	9716	0218	0720	1222*	1724*	**21**82227	50	100	151	201	251
,339	**21**82729*	3232*	3735	4238	4741	5244	5747*	6250*	6754	7257*	50	101	151	201	252
,34	7761*	8265	8769	9273	9777*	0281*	0786	1290*	1795	**21**92300	50	101	151	202	252
,341	**21**92804*	3309*	3814*	4320	4825*	5330*	5836*	6342	6847*	7353*	51	101	152	202	253
,342	7859*	8366	8872	9378*	9885	0391*	0898	1405	1912	**22**02419	51	101	152	203	253
,343	**22**02926	3433*	3941	4448*	4956	5464	5972	6480	6988	7496	51	102	152	203	254
,344	8004*	8513	9021*	9530	0039	0548	1057	1566	2075*	**22**12585	51	102	153	204	254
,345	**22**13094*	3604	4114	4623*	5133*	5644	6154	6664*	7175	7685*	51	102	153	204	255

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,346	8196	8707	9218	9729	0240	0751*	1263	1774*	2286	2222798	51	102	153	205	256
,347	2223309*	3821*	4333*	4846	5358*	5871	6383*	6896	7409	7922	51	102	154	205	256
,348	8435	8948	9461*	9975	0488*	1002	1515*	2029*	2543*	2233057*	51	103	154	205	257
,349	2233572	4086*	4601	5115*	5630	6145	6660	7175	7690	8205*	51	103	154	206	257
,35	8721	9236*	9752	0268	0784	1300	1816	2332	2848*	2243365	52	103	155	206	258
,351	2243881*	4398*	4915*	5432	5949*	6466*	6984	7501*	8019	8536*	52	103	155	207	259
,352	9054*	9572*	0090*	0608*	1127	1645	2163*	2682*	3201	2253720	52	104	156	207	259
,353	2254239	4758	5277*	5796*	6316	6835*	7355*	7875*	8395*	8915*	52	104	156	208	260
,354	9435*	9956	0476*	0997	1517*	2038*	2559	3080	3601*	2264122*	52	104	156	208	260
,355	2264644	5165*	5687	6209	6731	7253	7775	8297	8819*	9342	52	104	157	209	261
,356	9864*	0387*	0910	1433	1956	2479*	3002*	3526	4049*	2274573*	52	105	157	209	262
,357	2275097	5621	6145	6669*	7193*	7718	8242*	8767	9292	9817	52	105	157	210	262
,358	2280342	0867	1392	1917*	2443	2968*	3494*	4020*	4546	5072*	53	105	158	210	263
,359	5598*	6125	6651*	7178	7704*	8231*	8758*	9285*	9812*	2290340	53	105	158	211	263
,36	2290867*	1395	1922*	2450*	2978*	3506*	4034*	4563	5091	5620	53	106	158	211	264
,361	6148*	6677	7206	7735	8264	8793*	9323	9852*	0382	2300911*	53	106	159	212	265
,362	2301441*	1971*	2501*	3032	3562*	4092*	4623*	5154	5685	6216	53	106	159	212	265
,363	6747	7278	7809*	8341	8872*	9404	9936	0468	1000	2311532	53	106	160	213	266
,364	2312064*	2597	3129*	3662	4195	4728	5261	5794	6327*	6861	53	107	160	213	266
,365	7394*	7928	8462	8996	9530	0064	0598	1132*	1667	2322202	53	107	160	214	267
,366	2322736*	3271*	3806*	4341*	4877	5412	5947*	6483*	7019	7555	54	107	161	214	268
,367	8091	8627	9163*	9700	0236	0773	1309*	1846*	2383*	2332920*	54	107	161	215	268
,368	2333458	3995	4532*	5070*	5608	6146	6684	7222	7760	8298*	54	108	161	215	269
,369	8837	9375*	9914*	0453	0992	1531	2070*	2610	3149*	2343689	54	108	162	216	270
,37	2344228*	4768*	5308*	5848*	6388*	6929	7469*	8010	8551	9091*	54	108	162	216	270

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,371	9632*	0173*	0715	1256	1797*	2339	2881	3423	3964*	**2354**507	54	108	162	217	271
,372	**2355**049	5591*	6134	6676*	7219	7762	8305	8848	9391	9934*	54	109	163	217	271
,373	**2360**478	1021*	1565*	2109	2653	3197	3741*	4285*	4830	5374*	54	109	163	218	272
,374	5919*	6464*	7009	7554*	8099*	8645	9190*	9736	0281*	**2370**827*	55	109	164	218	273
,375	**2371**373*	1919*	2466	3012	3558*	4105	4652	5198*	5745*	6293	55	109	164	219	273
,376	6840	7387*	7935	8482*	9030	9578	0126	0674	1222*	**2381**770*	55	110	164	219	274
,377	**2382**319	2868	3416*	3965*	4514*	5063*	5613	6162	6711*	7261*	55	110	165	220	275
,378	7811	8361	8911	9461	0011*	0561*	1112	1663	2213*	**2392**764*	55	110	165	220	275
,379	**2393**315*	3866*	4418	4969*	5521	6072*	6624*	7176	7728	8280*	55	110	165	221	276
,38	8832*	9385	9937*	0490*	1043	1596	2149	2702	3255*	**2403**809	55	111	166	221	276
,381	**2404**362*	4916	5470	6024	6578	7132*	7686*	8241	8795*	9350*	55	111	166	222	277
,382	9905	0460	1015	1570*	2126	2681*	3237	3792*	4348*	**2414**904*	56	111	167	222	278
,383	**2415**460*	6017	6573	7129*	7686*	8243	8800	9357	9914	**2420**471*	56	111	167	223	278
,384	**2421**029	1586*	2144	2702	3259*	3817*	4376	4934	5492*	6051	56	112	167	223	279
,385	6610	7168*	7727*	8286*	8846	9405	9964*	0524	1084	**2431**644	56	112	168	224	280
,386	**2432**204	2764	3324	3884*	4445	5005*	5566*	6127	6688	7249*	56	112	168	224	280
,387	7810*	8372	8933*	9495	0057	0619	1181	1743	2305*	**2442**867*	56	112	169	225	281
,388	**2443**430*	3993	4556	5118*	5682	6245	6808*	7372	7935*	8499	56	113	169	225	282
,389	9063	9627	0191	0755*	1319*	1884	2449	3013*	3578*	**2454**143*	56	113	169	226	282
,39	**2454**708*	5274	5839*	6405	6970*	7536*	8102*	8668*	9234*	9801	57	113	170	226	283
,391	**2460**367*	0934	1500*	2067*	2634*	3201*	3769	4336	4903*	5471*	57	113	170	227	284

,392	6039	6607	7175	7743	8311*	8880	9448*	0017	0586	**2471**1155	57	114	171	227	284
,393	**2471**1724	2293	2862*	3432	4001*	4571	5141	5711	6281	6851*	57	114	171	228	285
,394	7422	7992*	8563	9133*	9704*	0275*	0847	1418	1989*	**2482**561	57	114	171	228	286
,395	**2483**133	3704*	4276*	4848*	5421	5993*	6566	7138*	7711	8284	57	114	172	229	286
,396	8857	9430	0003*	0577	1150*	1724	2298	2872	3446	**2494**020	57	115	172	229	287
,397	**2494**594*	5169	5743*	6318*	6893	7468	8043*	8618*	9194	9769*	57	115	172	230	287
,398	**2500**345	0921	1497	2073	2649	3225*	3802	4378*	4955	5532	58	115	173	231	288
,399	6109	6686	7263*	7841	8418*	8996	9573*	0151*	0729*	**2511**308	58	116	173	231	289
,4	**251**188*	1246	1304	1362	1420	1478	1535*	1593*	1651*	1709*	6	12	17	23	29
,401	1767*	1825*	1883*	1941*	1999*	2057*	2115*	2173*	2231*	2289*	6	12	17	23	29
,402	2348	2406	2464	2522	2580*	2638*	2696*	2755	2813	2871*	6	12	17	23	29
,403	2929*	2988	3046	3104*	3162*	3221	3279	3337*	3396	3454	6	12	17	23	29
,404	3512*	3571	3629*	3688	3746	3804*	3863	3921*	3980	4038*	6	12	18	23	29
,405	4097	4155*	4214	4272*	4331	4389*	4448*	4507	4565*	4624	6	12	18	23	29
,406	4683	4741*	4800	4859	4917*	4976	5035	5093*	5152*	5211	6	12	18	23	29
,407	5270	5328*	5387*	5446*	5505	5564	5623	5681*	5740*	5799*	6	12	18	24	29
,408	5858*	5917*	5976	6035	6094	6153	6212	6271	6330	6389	6	12	18	24	29
,409	6448	6507	6566*	6625*	6684*	6743*	6802*	6862	6921	6980	6	12	18	24	30
,41	7039*	7098*	7157*	7217	7276	7335*	7394*	7454	7513	7572*	6	12	18	24	30
,411	7632	7691	7750*	7810	7869*	7928*	7988	8047*	8107	8166*	6	12	18	24	30
,412	8226	8285	8344*	8404	8463*	8523	8583	8642*	8702	8761*	6	12	18	24	30
,413	8821	8880*	8940*	9000	9059*	9119	9179	9238*	9298	9358	6	12	18	24	30
,414	9417*	9477*	9537	9597	9656*	9716*	9776*	9836	9896	9956	6	12	18	24	30
,415	**260**015*	0075*	0135*	0195*	0255*	0315	0375	0435	0495	0555	6	12	18	24	30
,416	0615	0675	0735	0795	0855*	0915*	0975*	1035*	1095*	1155*	6	12	18	24	30
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,417	1216	1276	1336	1396*	1456*	1517	1577	1637*	1697*	1758	6	12	18	24	30
,418	1818	1878*	1938*	1999	2059*	2119*	2180	2240*	2301	2361	6	12	18	24	30
,419	2421*	2482	2542*	2603	2663*	2724	2784*	2845	2905*	2966	6	12	18	24	30
,42	3026*	3087	3147*	3208*	3269	3329*	3390	3451	3511*	3572	6	12	18	24	30
,421	3633	3693*	3754*	3815	3876	3936*	3997*	4058	4119	4180	6	12	18	24	30
,422	4240*	4301*	4362*	4423	4484	4545	4606	4667	4728	4789	6	12	18	24	30
,423	4850	4911	4972	5033	5094	5155	5216	5277	5338	5399	6	12	18	24	31
,424	5460*	5521*	5582*	5643*	5705	5766	5827*	5888*	5950	6011	6	12	18	24	31
,425	6072*	6133*	6195	6256	6317*	6379	6440	6501*	6563	6624	6	12	18	25	31
,426	6685*	6747	6808*	6870	6931*	6993	7054*	7116	7177*	7239	6	12	18	25	31
,427	7300*	7362	7423*	7485	7546*	7608*	7670	7731*	7793	7855	6	12	18	25	31
,428	7916*	7978*	8040	8101*	8163*	8225	8287	8349	8410*	8472*	6	12	19	25	31
,429	8534	8596	8658	8720	8781*	8843*	8905*	8967*	9029*	9091*	6	12	19	25	31
,43	9153	9215	9277	9339	9401	9463*	9525*	9587*	9649*	9711*	6	12	19	25	31
,431	9773*	9836	9898	9960	0022*	0084*	0146*	0209	0271	**27**0333*	6	12	19	25	31
,432	**27**0395*	0458	0520	0582*	0644*	0707	0769*	0832	0894	0956*	6	12	19	25	31
,433	1019	1081*	1144	1206	1268*	1331	1393*	1456	1518*	1581	6	12	19	25	31
,434	1643*	1706	1769	1831*	1894	1956*	2019	2082	2144*	2207	6	13	19	25	31
,435	2270	2332*	2395*	2458	2521	2583*	2646*	2709	2772	2834*	6	13	19	25	31
,436	2897*	2960*	3023	3086	3149	3212	3275	3337*	3400*	3463*	6	13	19	25	31
,437	3526*	3589*	3652*	3715*	3778*	3841*	3905	3968	4031	4094	6	13	19	25	32

,438	4157	4220*	4283*	4346*	4410	4473	4536	4599*	4662*	4726	6	13	19	25	32
,439	4789	4852*	4915*	4979	5042*	5105*	5169	5232*	5296	5359	6	13	19	25	32
,44	5422*	5486	5549*	5613	5676*	5740	5803*	5867	5930*	5994	6	13	19	25	32
,441	6057*	6121	6184*	6248*	6312	6375*	6439	6503	6566*	6630	6	13	19	25	32
,442	6694	6757*	6821*	6885	6949	7012*	7076*	7140*	7204	7268	6	13	19	26	32
,443	7332	7395*	7459*	7523*	7587*	7651	7715	7779	7843	7907	6	13	19	26	32
,444	7971	8035	8099	8163	8227	8291*	8355*	8419*	8483*	8547*	6	13	19	26	32
,445	8612	8676	8740	8804*	8868*	8933	8997	9061*	9125*	9190	6	13	19	26	32
,446	9254	9318*	9383	9447	9511*	9576	9640	9704*	9769	9833*	6	13	19	26	32
,447	9898	9962*	0027	0091*	0156	0220*	0285	0349*	0414	280478*	6	13	19	26	32
,448	280543	0607*	0672*	0737	0801*	0866*	0931	0995*	1060*	1125	6	13	19	26	32
,449	1190	1254*	1319*	1384	1449	1514	1578*	1643*	1708*	1773	6	13	19	26	32
,45	1838	1903	1968	2033	2097*	2162*	2227*	2292*	2357*	2422*	6	13	19	26	32
,451	2487*	2553	2618	2683	2748	2813	2878*	2943*	3008*	3074	7	13	20	26	33
,452	3139	3204	3269*	3334*	3400	3465	3530*	3595*	3661	3726*	7	13	20	26	33
,453	3791*	3857	3922*	3988	4053	4118*	4184	4249*	4315	4380*	7	13	20	26	33
,454	4446	4511*	4577	4642*	4708	4773*	4839	4904*	4970*	5036	7	13	20	26	33
,455	5101*	5167	5233	5298*	5364*	5430	5495*	5561*	5627	5693	7	13	20	26	33
,456	5759	5824*	5890*	5956*	6022	6088	6154	6220	6285*	6351*	7	13	20	26	33
,457	6417*	6483*	6549*	6615*	6681*	6747*	6813*	6879*	6945*	7011*	7	13	20	26	33
,458	7078	7144	7210	7276	7342*	7408*	7474*	7541	7607	7673*	7	13	20	26	33
,459	7739*	7806	7872	7938*	8004*	8071	8137*	8203*	8270	8336*	7	13	20	27	33
,46	8403	8469*	8535*	8602	8668*	8735	8801*	8868	8934*	9001	7	13	20	27	33
,461	9067*	9134*	9201	9267*	9334	9400*	9467*	9534	9600*	9667*	7	13	20	27	33
,462	9734	9801	9867*	9934*	0001	0068	0134*	0201*	0268*	290335	7	13	20	27	33
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,463	290402	0469	0536	0602*	0669*	0736*	0803*	0870*	0937*	1004*	7	13	20	27	33
,464	1071*	1138*	1205*	1272*	1339*	1407	1474	1541	1608	1675*	7	13	20	27	34
,465	1742*	1809*	1877	1944	2011*	2078*	2146	2213	2280*	2347*	7	13	20	27	34
,466	2415	2482*	2549*	2617	2684*	2752	2819*	2886*	2954	3021*	7	13	20	27	34
,467	3089	3156*	3224	3291*	3359	3426*	3494*	3562	3629*	3697	7	14	20	27	34
,468	3764*	3832*	3900	3967*	4035*	4103	4171	4238*	4306*	4374	7	14	20	27	34
,469	4442	4509*	4577*	4645*	4713	4781	4849	4917	4985	5052*	7	14	20	27	34
,47	5120*	5188*	5256*	5324*	5392*	5460*	5528*	5596*	5665	5733	7	14	20	27	34
,471	5801	5869	5937	6005*	6073*	6141*	6210	6278	6346*	6414*	7	14	20	27	34
,472	6483	6551	6619*	6688	6756	6824*	6893	6961	7029*	7098	7	14	21	27	34
,473	7166*	7235	7303	7371*	7440	7508*	7577	7645*	7714*	7783	7	14	21	27	34
,474	7851*	7920	7988*	8057	8126	8194*	8263	8332	8400*	8469*	7	14	21	27	34
,475	8538	8607	8675*	8744*	8813	8882	8950*	9019*	9088*	9157*	7	14	21	28	34
,476	9226	9295	9364	9433	9502	9571	9640	9709	9778	9847	7	14	21	28	34
,477	9916	9985	0054	0123	0192*	0261*	0330*	0400	0469	300538	7	14	21	28	35
,478	300607*	0676*	0746	0815	0884*	0953*	1023	1092*	1161*	1231	7	14	21	28	35
,479	1300*	1369*	1439	1508*	1578	1647*	1717	1786*	1856	1925*	7	14	21	28	35
,48	1995	2064*	2134	2203*	2273	2343	2412*	2482	2551*	2621*	7	14	21	28	35
,481	2691	2761	2830*	2900*	2970	3040	3109*	3179*	3249	3319	7	14	21	28	35
,482	3389	3458*	3528*	3598*	3668*	3738*	3808*	3878*	3948	4018	7	14	21	28	35
,483	4088*	4158*	4228*	4298*	4368*	4438*	4508*	4579	4649	4719	7	14	21	28	35

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,484	4789	4859*	4929*	5000	5070	5140*	5210*	5281	5351	5421*	7	14	21	28	35
,485	5492	5562	5632*	5703	5773*	5844	5914	5984*	6055	6125*	7	14	21	28	35
,486	6196	6266*	6337	6407*	6478	6549	6619*	6690	6760*	6831*	7	14	21	28	35
,487	6902	6972*	7043*	7114	7184*	7255*	7326	7397	7468	7538*	7	14	21	28	35
,488	7609*	7680*	7751	7822	7893	7964	8034*	8105*	8176*	8247*	7	14	21	28	35
,489	8318*	8389*	8460*	8531*	8602*	8673*	8745	8816	8887	8958	7	14	21	28	36
,49	9029*	9100*	9171*	9243	9314	9385*	9456*	9528	9599	9670*	7	14	21	28	36
,491	9741*	9813	9884*	9955*	0027	0098*	0170	0241*	0313	**31**0384	7	14	21	29	36
,492	**31**0455*	0527	0598*	0670	0742	0813*	0885	0956*	1028	1099*	7	14	21	29	36
,493	1171*	1243	1314*	1386*	1458	1530	1601*	1673*	1745	1817	7	14	22	29	36
,494	1888*	1960*	2032*	2104	2176	2248	2320	2392	2464	2535*	7	14	22	29	36
,495	2607*	2679*	2751*	2823*	2895*	2968	3040	3112	3184	3256	7	14	22	29	36
,496	3328*	3400*	3472*	3545	3617	3689*	3761*	3834	3906	3978*	7	14	22	29	36
,497	4050*	4123	4195*	4267*	4340	4412*	4485	4557	4629*	4702	7	14	22	29	36
,498	4774*	4847	4919*	4992	5064*	5137	5210	5282*	5355	5427*	7	15	22	29	36
,499	5500	5573	5645*	5718	5791	5863*	5936*	6009	6082	6154*	7	15	22	29	36
,5	6227*	6300*	6373	6446	6519	6592	6664*	6737*	6810*	6883*	7	15	22	29	36
,501	6956*	7029*	7102*	7175*	7248*	7321*	7394*	7468	7541	7614	7	15	22	29	37
,502	7687	7760*	7833*	7906*	7980	8053	8126*	8199*	8273	8346	7	15	22	29	37
,503	8419*	8493	8566	8639*	8713	8786*	8859*	8933	9006*	9080	7	15	22	29	37
,504	9153*	9227	9300*	9374	9447*	9521	9595	9668*	9742	9815*	7	15	22	29	37
,505	9889*	9963	0036*	0110*	0184	0258	0331*	0405*	0479	**32**0553	7	15	22	29	37
,506	**32**0626*	0700*	0774*	0848	0922	0996	1070	1144	1218	1292	7	15	22	30	37
,507	1366	1440	1514	1588	1662	1736	1810	1884	1958*	2032*	7	15	22	30	37
,508	2106*	2181	2255	2329	2403*	2477*	2552	2626	2700*	2775	7	15	22	30	37

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
,509	2849	2923*	2998	3072*	3146*	3221	3295*	3370	3444*	3519	7	15	22	30	37
,51	3593*	3668	3742*	3817	3891*	3966	4041	4115*	4190	4264*	7	15	22	30	37
,511	4339*	4414	4489	4563*	4638	4713	4788	4862*	4937*	5012	7	15	22	30	37
,512	5087	5162	5237	5311*	5386*	5461*	5536*	5611*	5686*	5761*	7	15	22	30	37
,513	5836*	5911*	5986*	6061*	6136*	6212	6287	6362	6437	6512*	8	15	23	30	38
,514	6587*	6663	6738	6813*	6888*	6964	7039	7114*	7189*	7265	8	15	23	30	38
,515	7340*	7416	7491	7566*	7642	7717*	7793	7868*	7944	8019*	8	15	23	30	38
,516	8095	8170*	8246	8322	8397*	8473	8548*	8624*	8700	8775*	8	15	23	30	38
,517	8851*	8927	9003	9078*	9154*	9230	9306	9382	9457*	9533*	8	15	23	30	38
,518	9609*	9685*	9761*	9837	9913	9989	0065	0141	0217	330293	8	15	23	30	38
,519	330369*	0445*	0521*	0597*	0673*	0750	0826	0902	0978*	1054*	8	15	23	30	38
,52	1131	1207	1283*	1359*	1436	1512*	1588*	1665	1741*	1818	8	15	23	31	38
,521	1894	1970*	2047	2123*	2200	2276*	2353	2429*	2506	2582*	8	15	23	31	38
,522	2659*	2736	2812*	2889	2966	3042*	3119	3196	3272*	3349*	8	15	23	31	38
,523	3426	3503	3579*	3656*	3733*	3810*	3887	3964	4041	4118	8	15	23	31	38
,524	4195	4272	4348*	4425*	4502*	4580	4657	4734	4811	4888	8	15	23	31	39
,525	4965	5042*	5119*	5196*	5274	5351	5428*	5505*	5583	5660	8	15	23	31	39
,526	5737*	5814*	5892	5969*	6046*	6124	6201*	6279	6356*	6434	8	15	23	31	39
,527	6511*	6589	6666*	6744	6821*	6899	6976*	7054	7132	7209*	8	16	23	31	39
,528	7287	7364*	7442*	7520	7598	7675*	7753*	7831	7909	7987	8	16	23	31	39
,529	8064*	8142*	8220*	8298	8376	8454	8532	8610	8688	8766	8	16	23	31	39

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,53	8844	8922	9000	9078	9156	9234	9312*	9390*	9468*	9547	8	16	23	31	39
,531	9625	9703	9781*	9859*	9938	0016*	0094*	0173	0251	340329*	8	16	23	31	39
,532	340408	0486*	0564*	0643	0721*	0800	0878*	0957	1035*	1114	8	16	24	31	39
,533	1192*	1271	1350	1428*	1507	1585*	1664*	1743	1821*	1900*	8	16	24	31	39
,534	1979	2058	2136*	2215*	2294*	2373	2452	2531	2609*	2688*	8	16	24	32	39
,535	2767*	2846*	2925*	3004*	3083*	3162*	3241*	3320*	3399*	3478*	8	16	24	32	40
,536	3557*	3637	3716	3795	3874*	3953*	4032*	4112	4191	4270*	8	16	24	32	40
,537	4349*	4429	4508*	4587*	4667	4746*	4825*	4905	4984*	5064	8	16	24	32	40
,538	5143*	5223	5302*	5382	5461*	5541	5620*	5700	5780	5859*	8	16	24	32	40
,539	5939	6019	6098*	6178	6258	6337*	6417*	6497	6577	6657	8	16	24	32	40
,54	6736*	6816*	6896*	6976	7056	7136	7216	7296	7376	7456	8	16	24	32	40
,541	7536	7616	7696	7776	7856	7936*	8016*	8096*	8176*	8257	8	16	24	32	40
,542	8337	8417*	8497*	8578	8658	8738*	8818*	8899	8979*	9059*	8	16	24	32	40
,543	9140	9220*	9301	9381*	9462	9542*	9623	9703*	9784	9864*	8	16	24	32	40
,544	9945	0025*	0106	0186*	0267*	0348	0428*	0509*	0590	350671	8	16	24	32	40
,545	350751*	0832*	0913	0994	1075	1155*	1236*	1317*	1398*	1479*	8	16	24	32	40
,546	1560	1641	1722	1803	1884	1965	2046	2127*	2208*	2289*	8	16	24	32	41
,547	2370*	2452	2533	2614	2695*	2776*	2858	2939	3020*	3101*	8	16	24	32	41
,548	3183	3264*	3345*	3427	3508*	3590	3671	3752*	3834	3915*	8	16	24	33	41
,549	3997	4078*	4160	4241*	4323*	4405	4486*	4568	4650	4731*	8	16	24	33	41
,55	4813	4895	4976*	5058*	5140	5222	5303*	5385*	5467*	5549	8	16	25	33	41
,551	5631	5713	5795	5877	5959	6040*	6122*	6204*	6287	6369	8	16	25	33	41
,552	6451	6533	6615	6697	6779*	6861*	6943*	7026	7108	7190*	8	16	25	33	41
,553	7272*	7355	7437	7519*	7602	7684	7766*	7849	7931*	8013*	8	16	25	33	41
,554	8096	8178*	8261	8343*	8426	8508*	8591*	8674	8756*	8839	8	17	25	33	41

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,555	8921*	9004*	9087	9169*	9252*	9335	9418	9500*	9583*	9666*	8	17	25	33	41
,556	9749	9832	9915	9997*	0080*	0163*	0246*	0329*	0412*	**36**0495*	8	17	25	33	41
,557	**36**0578*	0661*	0744*	0827*	0910*	0994	1077	1160	1243	1326*	8	17	25	33	42
,558	1409*	1493	1576	1659*	1742*	1826	1909*	1992*	2076	2159*	8	17	25	33	42
,559	2242*	2326	2409*	2493	2576*	2660	2743*	2827	2910*	2994	8	17	25	33	42
,56	3078	3161*	3245	3328*	3412*	3496	3580	3663*	3747	3831	8	17	25	33	42
,561	3915	3998*	4082*	4166*	4250	4334	4418	4502	4586	4669*	8	17	25	34	42
,562	4753*	4837*	4921*	5005*	5090	5174	5258	5342	5426	5510*	8	17	25	34	42
,563	5594*	5678*	5763	5847	5931*	6015*	6100	6184*	6268*	6353	8	17	25	34	42
,564	6437*	6521*	6606	6690*	6775	6859*	6944	7028*	7113	7197*	8	17	25	34	42
,565	7282	7366*	7451	7536	7620*	7705	7790	7874*	7959	8044	8	17	25	34	42
,566	8128*	8213*	8298*	8383	8468	8553	8637*	8722*	8807*	8892*	8	17	25	34	42
,567	8977*	9062*	9147*	9232*	9317*	9402*	9487*	9572*	9657*	9743	9	17	26	34	43
,568	9828	9913	9998*	0083*	0168*	0254	0339	0424*	0510	**37**0595	9	17	26	34	43
,569	**37**0680*	0766	0851	0936*	1022	1107*	1193	1278*	1364	1449*	9	17	26	34	43
,57	1535	1620*	1706	1791*	1877*	1963	2048*	2134*	2220	2305*	9	17	26	34	43
,571	2391*	2477	2563	2649	2734*	2820*	2906*	2992	3078	3164	9	17	26	34	43
,572	3250	3336	3422	3508	3594	3680	3766	3852	3938	4024	9	17	26	34	43
,573	4110*	4196*	4282*	4369	4455	4541*	4627*	4714	4800	4886*	9	17	26	34	43
,574	4973	5059	5145*	5232	5318*	5404*	5491	5577*	5664	5750*	9	17	26	35	43
,575	5837	5923*	6010*	6097	6183*	6270	6357	6443*	6530	6617	9	17	26	35	43

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,576	6703*	6790*	6877	6964	7050*	7137*	7224*	7311	7398	7485	9	17	26	35	43
,577	7572	7659	7746	7833	7920	8007	8094	8181	8268	8355	9	17	26	35	44
,578	8442*	8529*	8616*	8704	8791	8878*	8965*	9053	9140	9227*	9	17	26	35	44
,579	9314*	9402	9489*	9577	9664*	9751*	9839	9926*	0014	380101*	9	17	26	35	44
,58	380189	0276*	0364*	0452	0539*	0627	0715	0802*	0890	0978	9	18	26	35	44
,581	1065*	1153*	1241	1329	1416*	1504*	1592*	1680*	1768	1856	9	18	26	35	44
,582	1944	2032	2120	2208	2296	2384	2472	2560	2648	2736*	9	18	26	35	44
,583	2824*	2912*	3001	3089	3177*	3265*	3354	3442	3530*	3618*	9	18	26	35	44
,584	3707	3795*	3883*	3972	4060*	4149	4237*	4326	4414*	4503	9	18	27	35	44
,585	4591*	4680	4768*	4857*	4946	5034*	5123	5212	5300*	5389*	9	18	27	35	44
,586	5478	5567	5655*	5744*	5833*	5922	6011	6100	6189	6278	9	18	27	36	44
,587	6366*	6455*	6544*	6633*	6722*	6812	6901	6990	7079	7168	9	18	27	36	45
,588	7257*	7346*	7436	7525	7614	7703*	7793	7882	7971*	8061	9	18	27	36	45
,589	8150	8239*	8329	8418*	8508	8597	8686*	8776	8866	8955*	9	18	27	36	45
,59	9045	9134*	9224	9313*	9403*	9493	9583	9672*	9762	9852	9	18	27	36	45
,591	9941*	0031*	0121*	0211	0301	0391	0481	0571	0660*	390750*	9	18	27	36	45
,592	390840*	0930*	1020*	1110*	1201	1291	1381	1471	1561*	1651*	9	18	27	36	45
,593	1741*	1832	1922	2012*	2102*	2193	2283	2373*	2464	2554*	9	18	27	36	45
,594	2644*	2735	2825*	2916	3006*	3097	3187*	3278	3368*	3459	9	18	27	36	45
,595	3550	3640*	3731	3822	3912*	4003	4094	4184*	4275*	4366	9	18	27	36	45
,596	4457	4548	4638*	4729*	4820*	4911*	5002*	5093*	5184*	5275*	9	18	27	36	45
,597	5366*	5457*	5548*	5639*	5730*	5822	5913	6004	6095*	6186*	9	18	27	36	46
,598	6278	6369	6460*	6551*	6643	6734*	6825*	6917	7008*	7100	9	18	27	37	46
,599	7191*	7283	7374*	7466	7557*	7649	7740*	7832	7923*	8015*	9	18	27	37	46
,6	8107	8198*	8290*	8382	8474	8565*	8657*	8749	8841	8933	9	18	28	37	46
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,601	9024*	9116*	9208*	9300*	9392*	9484*	9576*	9668*	9760*	9852*	9	18	28	37	46
,602	9944*	0036*	0128*	0221	0313	0405	0497*	0589*	0682	400774	9	18	28	37	46
,603	400866*	0959	1051	1143*	1236	1328	1420*	1513	1605*	1698	9	18	28	37	46
,604	1790*	1883	1975*	2068	2161	2253*	2346	2438*	2531*	2624	9	19	28	37	46
,605	2717	2809*	2902*	2995	3088	3180*	3273*	3366*	3459*	3552	9	19	28	37	46
,606	3645	3738	3831	3924	4017	4110	4203	4296*	4389*	4482*	9	19	28	37	47
,607	4575*	4669	4762	4855	4948*	5041*	5135	5228*	5321*	5415	9	19	28	37	47
,608	5508*	5601*	5695	5788*	5882	5975*	6069	6162*	6256	6349*	9	19	28	37	47
,609	6443	6536*	6630*	6724	6817*	6911*	7005	7098*	7192*	7286	9	19	28	37	47
,61	7380	7474	7567*	7661*	7755*	7849*	7943	8037	8131	8225	9	19	28	38	47
,611	8319	8413	8507	8601*	8695*	8789*	8883*	8978	9072	9166	9	19	28	38	47
,612	9260*	9354*	9449	9543	9637*	9732	9826	9920*	0015	410109*	9	19	28	38	47
,613	410204	0298*	0393	0487*	0582	0676*	0771	0865*	0960	1055	9	19	28	38	47
,614	1149*	1244	1339	1433*	1528*	1623	1718	1812*	1907*	2002*	9	19	28	38	47
,615	2097*	2192	2287	2382	2477	2572	2667	2762	2857	2952	9	19	28	38	47
,616	3047*	3142*	3237*	3332*	3428	3523	3618*	3713*	3809	3904	10	19	29	38	48
,617	3999*	4095	4190	4285*	4381	4476*	4572	4667*	4762*	4858*	10	19	29	38	48
,618	4954	5049*	5145	5240*	5336	5432	5527*	5623	5719	5814*	10	19	29	38	48
,619	5910*	6006	6102	6198	6293*	6389*	6485*	6581*	6677	6773	10	19	29	38	48
,62	6869	6965	7061	7157	7253*	7349*	7445*	7541*	7637*	7734	10	19	29	38	48
,621	7830	7926*	8022*	8119	8215	8311*	8408	8504	8600*	8697	10	19	29	39	48

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,622	8793*	8890	8986	9082*	9179	9275*	9372*	9469	9565*	9662	10	19	29	39	48
,623	9758*	9855*	9952	0049	0145*	0242*	0339	0436	0532*	420629*	10	19	29	39	48
,624	420726*	0823*	0920	1017	1114	1211	1308	1405	1502	1599	10	19	29	39	48
,625	1696*	1793*	1890*	1987*	2085	2182	2279*	2376*	2474	2571	10	19	29	39	49
,626	2668*	2765*	2863	2960*	3058	3155*	3252*	3350	3447*	3545	10	19	29	39	49
,627	3642*	3740*	3838	3935*	4033	4130*	4228*	4326	4424	4521*	10	20	29	39	49
,628	4619*	4717	4815	4912*	5010*	5108*	5206*	5304*	5402	5500	10	20	29	39	49
,629	5598	5696	5794	5892*	5990*	6088*	6186*	6284*	6383	6481	10	20	29	39	49
,63	6579*	6677*	6776	6874	6972*	7070*	7169	7267*	7366	7464	10	20	29	39	49
,631	7562*	7661	7759*	7858	7956*	8055	8153*	8252*	8351	8449*	10	20	30	39	49
,632	8548*	8647	8745*	8844*	8943	9042	9140*	9239*	9338*	9437*	10	20	30	40	49
,633	9536	9635	9734	9833	9932	0031	0130	0229	0328	430427	10	20	30	40	50
,634	430526*	0625*	0724*	0824	0923	1022*	1121*	1221	1320	1419*	10	20	30	40	50
,635	1519	1618	1717*	1817	1916*	2016	2115*	2215	2314*	2414	10	20	30	40	50
,636	2513*	2613	2713	2812*	2912	3012	3111*	3211*	3311	3411	10	20	30	40	50
,637	3510*	3610*	3710*	3810	3910	4010	4110	4210	4310	4410	10	20	30	40	50
,638	4510	4610	4710	4810	4910*	5010*	5110*	5211	5311	5411*	10	20	30	40	50
,639	5511*	5612	5712	5812*	5913	6013*	6113*	6214	6314*	6415	10	20	30	40	50
,64	6515*	6616	6716*	6817	6918	7018*	7119	7219*	7320*	7421	10	20	30	40	50
,641	7522	7622*	7723*	7824	7925	8026	8126*	8227*	8328*	8429*	10	20	30	40	50
,642	8530*	8631*	8732*	8833*	8934*	9035*	9136*	9238	9339	9440	10	20	30	40	51
,643	9541*	9642*	9744	9845	9946*	0047*	0149	0250*	0352	440453	10	20	30	41	51
,644	440554*	0656	0757*	0859	0960*	1062	1163*	1265*	1367	1468*	10	20	30	41	51
,645	1570	1672	1773*	1875*	1977	2079	2180*	2282*	2384*	2486	10	20	31	41	51
,646	2588	2690	2792	2894	2996	3098	3200	3302	3404	3506*	10	20	31	41	51

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,647	3608*	3710*	3812*	3915	4017	4119*	4221*	4324	4426*	4528*	10	20	31	41	51
,648	4631	4733*	4836	4938*	5040*	5143	5245*	5348*	5451	5553*	10	20	31	41	51
,649	5656	5758*	5861*	5964	6066*	6169*	6272	6375	6477*	6580*	10	21	31	41	51
,65	6683*	6786	6889	6992	7095	7198	7301	7404	7507	7610	10	21	31	41	51
,651	7713	7816	7919*	8022*	8125*	8229	8332	8435*	8538*	8642	10	21	31	41	52
,652	8745	8848*	8952	9055	9158*	9262	9365*	9469	9572*	9676	10	21	31	41	52
,653	9779*	9883	9987	0090*	0194	0297*	0401*	0505	0609	**45**0712*	10	21	31	41	52
,654	**45**0816*	0920*	1024	1128	1232	1336	1439*	1543*	1647*	1751*	10	21	31	42	52
,655	1855*	1960	2064	2168	2272	2376	2480*	2584*	2689	2793	10	21	31	42	52
,656	2897*	3001*	3106	3210*	3314*	3419	3523*	3628	3732*	3837	10	21	31	42	52
,657	3941*	4046	4150*	4255	4359*	4464*	4569	4673*	4778*	4883	10	21	31	42	52
,658	4988	5092*	5197*	5302	5407	5512	5617	5722	5826*	5931*	10	21	31	42	52
,659	6036*	6141*	6246*	6352	6457	6562	6667	6772*	6877*	6982*	11	21	32	42	53
,66	7088	7193	7298*	7404	7509	7614*	7720	7825*	7930*	8036	11	21	32	42	53
,661	8141*	8247	8352*	8458	8564	8669*	8775	8880*	8986*	9092	11	21	32	42	53
,662	9198	9303*	9409*	9515	9621	9726*	9832*	9938*	0044*	**46**0150*	11	21	32	42	53
,663	**46**0256*	0362*	0468*	0574*	0680*	0786*	0892*	0999	1105	1211	11	21	32	42	53
,664	1317*	1423*	1530	1636	1742*	1848*	1955	2061*	2168	2274*	11	21	32	43	53
,665	2381	2487*	2594	2700*	2807	2913*	3020	3126*	3233*	3340	11	21	32	43	53
,666	3446*	3553*	3660	3767	3873*	3980*	4087*	4194*	4301	4408	11	21	32	43	53
,667	4515	4622	4729	4836	4943	5050	5157	5264*	5371*	5478*	11	21	32	43	54

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,668	5586	5693	5800*	5907*	6015	6122	6229*	6337	6444*	6551*	11	21	32	43	54
,669	6659	6766*	6874	6981*	7089	7196*	7304*	7412	7519*	7627	11	22	32	43	54
,67	7735	7842*	7950*	8058	8166	8273*	8381*	8489*	8597*	8705	11	22	32	43	54
,671	8813	8921	9029	9137	9245	9353	9461*	9569*	9677*	9785*	11	22	32	43	54
,672	9894	0002	0110*	0218*	0327	0435	0543*	0652	0760	470868*	11	22	32	43	54
,673	470977	1085*	1194	1302*	1411	1519*	1628	1737	1845*	1954	11	22	33	43	54
,674	2063	2171*	2280	2389	2498	2606*	2715*	2824*	2933	3042	11	22	33	44	54
,675	3151	3260	3369	3478	3587	3696	3805	3914*	4023*	4132*	11	22	33	44	55
,676	4241*	4351	4460	4569*	4678*	4788	4897*	5006*	5116	5225*	11	22	33	44	55
,677	5335	5444*	5554	5663*	5773	5882*	5992	6101*	6211*	6321	11	22	33	44	55
,678	6430*	6540*	6650	6760	6869*	6979*	7089*	7199*	7309	7419	11	22	33	44	55
,679	7529	7639	7749	7859	7969	8079	8189	8299*	8409*	8519*	11	22	33	44	55
,68	8630	8740	8850*	8960*	9071	9181	9291*	9402	9512*	9622*	11	22	33	44	55
,681	9733	9843*	9954	0064*	0175*	0286	0396*	0507	0617*	480728*	11	22	33	44	55
,682	480839	0950	1060*	1171*	1282	1393	1504	1614*	1725*	1836*	11	22	33	44	55
,683	1947*	2058*	2169*	2280*	2391*	2502*	2614	2725	2836	2947*	11	22	33	44	56
,684	3058*	3170	3281	3392*	3503*	3615	3726*	3838	3949	4060*	11	22	33	45	56
,685	4172	4283*	4395	4506*	4618*	4730	4841*	4953	5065	5176*	11	22	33	45	56
,686	5288*	5400	5512	5623*	5735*	5847*	5959	6071	6183	6295	11	22	34	45	56
,687	6407	6519	6631	6743	6855	6967*	7079*	7191*	7304	7416	11	22	34	45	56
,688	7528	7640*	7753	7865	7977*	8090	8202*	8314*	8427	8539*	11	22	34	45	56
,689	8652*	8764*	8877	8990	9102*	9215	9327*	9440*	9553	9666	11	23	34	45	56
,69	9778	9891*	0004	0117	0230	0343	0455*	0568*	0681*	490794*	11	23	34	45	56
,691	490907*	1020*	1133*	1247	1360	1473	1586*	1699*	1812*	1926	11	23	34	45	57
,692	2039*	2152*	2266	2379*	2492*	2606	2719*	2833	2946*	3060	11	23	34	45	57

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,693	3173*	3287	3400*	3514*	3628	3741*	3855*	3969	4083	4196*	11	23	34	45	57
,694	4310*	4424*	4538	4652	4766	4880	4994	5108	5222	5336	11	23	34	46	57
,695	5450	5564	5678	5792*	5906*	6020*	6135	6249	6363*	6477*	11	23	34	46	57
,696	6592	6706*	6821	6935	7049*	7164	7278*	7393	7507*	7622	11	23	34	46	57
,697	7737	7851*	7966	8081	8195*	8310	8425	8539*	8654*	8769*	11	23	34	46	57
,698	8884	8999	9114	9229	9344	9459	9574	9689	9804	9919	11	23	34	46	57
,699	**5**00034*	0149*	0264*	0380	0495	0610*	0725*	0841	0956	1071*	12	23	35	46	58
,7	1187	1302*	1418	1533*	1649	1764*	1880	1995*	2111	2226*	12	23	35	46	58
,701	2342*	2458	2573*	2689*	2805	2921	3037	3152*	3268*	3384*	12	23	35	46	58
,702	3500*	3616*	3732*	3848*	3964*	4080*	4196*	4312*	4428*	4545	12	23	35	46	58
,703	4661	4777*	4893*	5010	5126	5242*	5358*	5475	5591*	5708	12	23	35	47	58
,704	5824*	5941	6057*	6174	6290*	6407	6523*	6640*	6757	6873*	12	23	35	47	58
,705	6990*	7107	7224	7341	7457*	7574*	7691*	7808*	7925	8042	12	23	35	47	58
,706	8159	8276	8393*	8510*	8627*	8744*	8861*	8979	9096	9213*	12	23	35	47	59
,707	9330*	9448	9565	9682*	9800	9917*	0035	0152	0269*	**51**0387	12	23	35	47	59
,708	**51**0504*	0622*	0740	0857*	0975	1093	1210*	1328*	1446	1564	12	24	35	47	59
,709	1681*	1799*	1917*	2035	2153	2271	2389	2507	2625	2743	12	24	35	47	59
,71	2861	2979	3097*	3215*	3333*	3452	3570	3688*	3806*	3925	12	24	35	47	59
,711	4043*	4162	4280	4398*	4517	4635*	4754	4872*	4991	5110	12	24	36	47	59
,712	5228*	5347	5465*	5584*	5703	5822	5940*	6059*	6178*	6297	12	24	36	48	59
,713	6416	6535	6654	6773	6892	7011	7130	7249	7368*	7487*	12	24	36	48	60

,714	7606*	7726	7845	7964*	8083*	8203	8322	8441*	8561	8680*	12	24	36	48	60
,715	8800	8919*	9039	9158*	9278	9397*	9517	9636*	9756*	9876	12	24	36	48	60
,716	9995*	0115*	0235*	0355	0475	0595	0714*	0834*	0954*	**52**1074*	12	24	36	48	60
,717	**52**1194*	1314*	1434*	1554*	1674*	1795	1915	2035	2155*	2275*	12	24	36	48	60
,718	2396	2516	2636*	2757	2877*	2997*	3118	3238*	3359	3479*	12	24	36	48	60
,719	3600	3721	3841*	3962	4082*	4203*	4324	4445	4565*	4686*	12	24	36	48	60
,72	4807	4928	5049	5170	5291	5412	5533	5654	5775	5896	12	24	36	48	60
,721	6017	6138	6259*	6380*	6501*	6623	6744	6865*	6987	7108	12	24	36	48	61
,722	7229*	7351	7472*	7594	7715*	7837	7958*	8080	8201*	8323*	12	24	36	49	61
,723	8445	8566*	8688*	8810	8932	9053*	9175*	9297*	9419*	9541	12	24	37	49	61
,724	9663	9785	9907	0029	0151*	0273*	0395*	0517*	0640	**53**0762	12	24	37	49	61
,725	**53**0884	1006*	1128*	1251	1373*	1495*	1618	1740*	1863	1985*	12	24	37	49	61
,726	2108	2230*	2353	2475*	2598*	2721	2843*	2966*	3089	3212	12	25	37	49	61
,727	3334*	3457*	3580*	3703	3826	3949	4072	4195	4318	4441	12	25	37	49	61
,728	4564	4687	4810*	4933*	5056*	5180	5303	5426*	5549*	5673	12	25	37	49	62
,729	5796*	5920	6043	6166*	6290	6413*	6537	6660*	6784*	6908	12	25	37	49	62
,73	7031*	7155	7279	7402*	7526*	7650	7774	7898	8021*	8145*	12	25	37	50	62
,731	8269*	8393*	8517*	8641*	8765*	8889*	9013*	9138	9262	9386	12	25	37	50	62
,732	9510*	9634*	9759	9883	0007*	0132	0256	0380*	0505	**54**0629*	12	25	37	50	62
,733	**54**0754	0878*	1003	1127*	1252*	1377	1501*	1626*	1751	1876	12	25	37	50	62
,734	2000*	2125*	2250*	2375	2500	2625	2750	2875	3000	3125	12	25	37	50	62
,735	3250	3375	3500*	3625*	3750*	3876	4001	4126*	4251*	4377	13	25	38	50	63
,736	4502*	4628	4753	4878*	5004	5129*	5255	5380*	5506*	5632	13	25	38	50	63
,737	5757*	5883*	6009	6134*	6260*	6386*	6512	6638	6764	6890	13	25	38	50	63
,738	7015*	7141*	7267*	7393*	7520	7646	7772	7898	8024*	8150*	13	25	38	50	63
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,739	8276*	8403	8529*	8655*	8782	8908*	9034*	9161	9287*	9414	13	25	38	51	63
,74	9540*	9667	9794	9920*	0047	0173*	0300*	0427	0554	550680*	13	25	38	51	63
,741	550807*	0934*	1061	1188	1315	1442	1569	1696	1823	1950	13	25	38	51	63
,742	2077	2204*	2331*	2458*	2586	2713	2840*	2968	3095	3222*	13	25	38	51	64
,743	3350	3477*	3604*	3732	3859*	3987*	4115	4242*	4370	4498	13	26	38	51	64
,744	4625*	4753	4881	5008*	5136*	5264*	5392	5520	5648	5776	13	26	38	51	64
,745	5904	6032	6160	6288	6416	6544*	6672*	6800*	6929	7057	13	26	38	51	64
,746	7185*	7314	7442	7570*	7699	7827*	7956	8084*	8213	8341*	13	26	39	51	64
,747	8470	8598*	8727	8856	8984*	9113*	9242	9371	9499*	9628*	13	26	39	51	64
,748	9757*	9886*	0015	0144	0273	0402	0531	0660*	0789*	560918*	13	26	39	52	65
,749	561047*	1177	1306	1435*	1564*	1694	1823*	1953	2082	2211*	13	26	39	52	65
,75	2341	2470*	2600	2729*	2859	2989	3118*	3248	3378	3507*	13	26	39	52	65
,751	3637*	3767	3897	4027	4157	4286*	4416*	4546*	4676*	4806*	13	26	39	52	65
,752	4936*	5067	5197	5327	5457*	5587*	5718	5848	5978*	6108*	13	26	39	52	65
,753	6239	6369*	6500	6630*	6761	6891*	7022	7152*	7283	7413*	13	26	39	52	65
,754	7544*	7675	7806	7936*	8067*	8198	8329	8460	8591	8721*	13	26	39	52	65
,755	8852*	8983*	9114*	9246	9377	9508	9639	9770*	9901*	570033	13	26	39	52	66
,756	570164	0295*	0426*	0558	0689*	0821	0952*	1084	1215*	1347	13	26	39	53	66
,757	1478*	1610	1741*	1873*	2005	2136*	2268*	2400	2532	2664	13	26	40	53	66
,758	2796	2927*	3059*	3191*	3323*	3455*	3587*	3720	3852	3984	13	26	40	53	66
,759	4116	4248*	4380*	4513	4645	4777*	4910	5042*	5174*	5307	13	26	40	53	66

,76	5439*	5572	5704*	5837*	5970	6102*	6235	6368	6500*	6633*	13	27	40	53	66
,761	6766	6899	7032	7165	7297*	7430*	7563*	7696*	7829*	7962*	13	27	40	53	66
,762	8096	8229	8362	8495*	8628*	8761*	8895	9028*	9161*	9295	13	27	40	53	67
,763	9428*	9562	9695*	9829	9962*	0096	0229*	0363	0497	**58**0630*	13	27	40	53	67
,764	**58**0764	898	1031*	1165*	1299*	1433	1567	1701	1835	1969	13	27	40	54	67
,765	2103	2237	2371	2505	2639*	2773*	2907*	3042	3176	3310*	13	27	40	54	67
,766	3445	3579	3713*	3848	3982*	4117	4251*	4386	4520*	4655	13	27	40	54	67
,767	4790	4924*	5059	5194	5328*	5463*	5598*	5733	5868	6003	13	27	40	54	67
,768	6138	6273	6408	6543	6678	6813	6948*	7083*	7218*	7354	14	27	41	54	68
,769	7489	7624*	7759*	7895	8030*	8166	8301*	8437	8572*	8708	14	27	41	54	68
,77	8843*	8979	9114*	9250*	9386	9521*	9657*	9793*	9929	**59**0065	14	27	41	54	68
,771	**59**0201	0336*	0472*	0608*	0744*	0880*	1017	1153	1289	1425	14	27	41	54	68
,772	1561*	1697*	1834	1970	2106*	2243	2379	2515*	2652	2788*	14	27	41	55	68
,773	2925	3061*	3198	3335	3471*	3608	3745	3881*	4018*	4155	14	27	41	55	68
,774	4292	4429	4565*	4702*	4839*	4976*	5113*	5250*	5387*	5525	14	27	41	55	68
,775	5662	5799	5936*	6073*	6211	6348	6485*	6623	6760	6897*	14	27	41	55	69
,776	7035	7172*	7310	7447*	7585	7723	7860*	7998	8136	8273*	14	28	41	55	69
,777	8411*	8549	8687	8825	8963	9100*	9238*	9376*	9514*	9652*	14	28	41	55	69
,778	9791	9929	0067	0205*	0343*	0482	0620	0758*	0896*	**60**1035	14	28	41	55	69
,779	**60**1173*	1312	1450*	1589	1727*	1866	2004*	2143	2282	2420*	14	28	42	55	69
,78	2559*	2698	2837	2975*	3114*	3253*	3392*	3531*	3670*	3809*	14	28	42	56	69
,781	3948*	4087*	4226*	4365*	4505	4644	4783*	4922*	5062	5201*	14	28	42	56	70
,782	5340*	5480	5619*	5759	5898*	6038	6177*	6317	6456*	6596*	14	28	42	56	70
,783	6736	6876	7015*	7155*	7295	7435	7575	7715	7855	7994*	14	28	42	56	70
,784	8135	8275	8415	8555	8695	8835*	8975*	9115*	9256	9396*	14	28	42	56	70
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,785	9536*	9677	9817*	9958	0098*	0239	0379*	0520	0660*	**61**0801	14	28	42	56	70
,786	**61**0942	1082*	1223	1364	1504*	1645*	1786*	1927*	2068	2209	14	28	42	56	70
,787	2350	2491	2632	2773*	2914*	3055*	3196*	3338	3479	3620*	14	28	42	56	71
,788	3762	3903	4044*	4186	4327*	4469	4610*	4752	4893*	5035	14	28	42	57	71
,789	5176*	5318*	5460	5601*	5743*	5885*	6027	6169	6311	6453	14	28	43	57	71
,79	6595	6736*	6879	7021	7163	7305	7447	7589*	7731*	7874	14	28	43	57	71
,791	8016	8158*	8301	8443	8585*	8728	8870*	9013	9155*	9298	14	28	43	57	71
,792	9441	9583*	9726	9869	0011*	0154*	0297	0440	0583	**62**0726	14	29	43	57	71
,793	**62**0869	1012	1155	1298	1441	1584	1727	1870*	2013*	2157	14	29	43	57	72
,794	2300	2443*	2586*	2730	2873*	3017	3160*	3304	3447*	3591	14	29	43	57	72
,795	3734*	3878	4022	4165*	4309*	4453	4597	4740*	4884*	5028*	14	29	43	58	72
,796	5172*	5316*	5460*	5604*	5748*	5892*	6036*	6181	6325	6469*	14	29	43	58	72
,797	6613*	6758	6902	7046*	7191	7335*	7480	7624*	7769	7913*	14	29	43	58	72
,798	8058	8202*	8347*	8492	8637	8781*	8926*	9071	9216	9361	14	29	43	58	72
,799	9506	9651	9796	9941	0086	0231	0376	0521*	0666*	**63**0812	15	29	44	58	73
,8	**63**0957	1102*	1247*	1393	1538*	1684	1829*	1975	2120*	2266	15	29	44	58	73
,801	2411*	2557	2703	2848*	2994*	3140	3286	3432	3577*	3723*	15	29	44	58	73
,802	3869*	4015*	4161*	4307*	4453*	4599*	4746	4892	5038	5184*	15	29	44	58	73
,803	5330*	5477	5623*	5769*	5916	6062*	6209	6355*	6502	6648*	15	29	44	59	73
,804	6795*	6942	7088*	7235*	7382	7529	7675*	7822*	7969*	8116*	15	29	44	59	73
,805	8263	8410	8557	8704*	8851*	8998*	9145*	9293	9440	9587*	15	29	44	59	74

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,806	9734*	9882	0029*	0176*	0324	0471*	0619	0766*	0914	**64**1061*	15	29	44	59	74
,807	**64**1209*	1357	1504*	1652*	1800	1948	2096	2243*	2391*	2539*	15	30	44	59	74
,808	2687*	2835*	2983*	3131*	3279*	3428	3576	3724	3872*	4020*	15	30	44	59	74
,809	4169	4317*	4465*	4614	4762*	4911	5059*	5208	5356*	5505*	15	30	45	59	74
,81	5654	5802*	5951*	6100	6249	6397*	6546*	6695*	6844*	6993*	15	30	45	60	74
,811	7142*	7291*	7440*	7589*	7738*	7888	8037	8186*	8335*	8485	15	30	45	60	75
,812	8634	8783*	8933	9082*	9232	9381*	9531	9680*	9830	9980	15	30	45	60	75
,813	**65**0129*	0279	0429	0578*	0728*	0878*	1028	1178	1328	1478	15	30	45	60	75
,814	1628	1778	1928*	2078*	2228*	2379	2529	2679*	2829*	2980	15	30	45	60	75
,815	3130*	3280*	3431	3581*	3732	3882*	4033*	4184	4334*	4485	15	30	45	60	75
,816	4636	4786*	4937*	5088*	5239	5390	5541	5692	5843	5994	15	30	45	60	75
,817	6145	6296	6447*	6598*	6749*	6901	7052	7203*	7355	7506	15	30	45	60	76
,818	7657*	7809	7960*	8112	8263*	8415	8567	8718*	8870	9022	15	30	45	61	76
,819	9173*	9325*	9477*	9629	9781	9933	0085	0237	0389	**66**0541	15	30	46	61	76
,82	**66**0693	0845*	0997*	1149*	1302	1454*	1606*	1759	1911*	2064	15	30	46	61	76
,821	2216*	2369	2521*	2674	2826*	2979	3132	3284*	3437	3590	15	31	46	61	76
,822	3743	3895*	4048*	4201*	4354*	4507*	4660*	4813*	4966*	5119*	15	31	46	61	76
,823	5273	5426	5579*	5732*	5886	6039*	6192*	6346	6499*	6653	15	31	46	61	77
,824	6806*	6960	7113*	7267*	7421	7574*	7728*	7882	8036	8190	15	31	46	61	77
,825	8343*	8497*	8651*	8805*	8959*	9113*	9267*	9422	9576	9730	15	31	46	62	77
,826	9884*	0038*	0193	0347*	0501*	0656	0810*	0965	1119*	**67**1274	15	31	46	62	77
,827	**67**1428*	1583	1738	1892*	2047*	2202	2357	2511*	2666*	2821*	15	31	46	62	77
,828	2976*	3131*	3286*	3441*	3596*	3751*	3907	4062	4217	4372*	16	31	47	62	78
,829	4528	4683	4838*	4994	5149*	5305	5460*	5616	5771*	5927	16	31	47	62	78
,83	6082*	6238*	6394	6550	6705*	6861*	7017*	7173*	7329*	7485	16	31	47	62	78

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
,831	7641*	7797*	7953*	8109*	8265*	8422	8578	8734*	8890*	9047	16	31	47	62	78
,832	9203*	9360	9516	9672*	9829	9986	0142*	0299	0455*	**68**0612*	16	31	47	63	78
,833	**68**0769	0926	1082*	1239*	1396*	1553*	1710*	1867*	2024*	2181*	16	31	47	63	78
,834	2338*	2495*	2652*	2810	2967	3124*	3282	3439	3596*	3754	16	31	47	63	79
,835	3911*	4069	4226*	4384	4541*	4699	4857	5014*	5172*	5330	16	32	47	63	79
,836	5488	5646	5803*	5961*	6119*	6277*	6435*	6593*	6752	6910	16	32	47	63	79
,837	7068	7226*	7384*	7543	7701*	7859*	8018	8176*	8335	8493*	16	32	48	63	79
,838	8652	8810*	8969*	9128	9286*	9445*	9604	9763	9922	**69**0080*	16	32	48	63	79
,839	**69**0239*	0398*	0557*	0716*	0875*	1034*	1194	1353	1512	1671*	16	32	48	64	80
,84	1830*	1990	2149*	2309	2468	2627*	2787	2946*	3106*	3266	16	32	48	64	80
,841	3425*	3585	3745	3904*	4064*	4224*	4384	4544	4704	4864	16	32	48	64	80
,842	5024	5184	5344	5504*	5664*	5824*	5985	6145	6305*	6466	16	32	48	64	80
,843	6626*	6786*	6947	7107*	7268	7428*	7589*	7750	7910*	8071*	16	32	48	64	80
,844	8232	8393	8554	8714*	8875*	9036*	9197*	9358*	9519*	9680*	16	32	48	64	80
,845	9841*	0003	0164	0325*	0486*	0648	0809*	0970*	1132	**70**1293*	16	32	48	65	81
,846	**70**1455	1616*	1778	1940	2101*	2263	2425	2586*	2748*	2910	16	32	49	65	81
,847	3072	3234	3396	3558	3720	3882	4044	4206	4368*	4530*	16	32	49	65	81
,848	4693	4855	5017*	5180	5342	5504*	5667	5829*	5992	6154*	16	32	49	65	81
,849	6317*	6480	6642*	6805*	6968	7131	7294	7456*	7619*	7782*	16	33	49	65	81
,85	7945*	8108*	8271*	8434*	8598	8761	8924*	9087*	9251	9414	16	33	49	65	82
,851	9577*	9741	9904*	0068	0231*	0395	0558*	0722	0886	**71**1049*	16	33	49	65	82

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,852	**71**1213*	1377	1541	1704*	1868*	2032*	2196*	2360*	2524*	2688*	16	33	49	66	82
,853	2853	3017	3181	3345*	3509*	3674	3838*	4002*	4167	4331*	16	33	49	66	82
,854	4496	4660*	4825	4990	5154*	5319	5484	5648*	5813*	5978*	16	33	49	66	82
,855	6143	6308	6473	6638	6803	6968	7133	7298*	7463*	7629	17	33	50	66	83
,856	7794	7959*	8124*	8290	8455*	8621	8786*	8952	9117*	9283	17	33	50	66	83
,857	9448*	9614*	9780	9946	0111*	0277*	0443*	0609*	0775	**72**0941	17	33	50	66	83
,858	**72**1107	1273*	1439*	1605*	1771*	1938	2104	2270*	2437	2603	17	33	50	66	83
,859	2769*	2936	3102*	3269	3435*	3602	3769	3935*	4102	4269	17	33	50	67	83
,86	4435*	4602*	4769*	4936*	5103	5270	5437	5604*	5771*	5938*	17	33	50	67	83
,861	6105*	6273	6440	6607*	6775	6942	7109*	7277	7444*	7612	17	33	50	67	84
,862	7779*	7947	8115	8282*	8450	8618	8785*	8953*	9121*	9289*	17	34	50	67	84
,863	9457*	9625	9793*	9961*	0129*	0297*	0465*	0634	0802	**73**0970*	17	34	50	67	84
,864	**73**1139	1307	1475*	1644	1812*	1981	2149*	2318	2487	2655*	17	34	51	67	84
,865	2824*	2993	3162	3330*	3499*	3668*	3837*	4006*	4175*	4344*	17	34	51	68	84
,866	4513*	4683	4852	5021	5190*	5359*	5529	5698*	5868	6037*	17	34	51	68	85
,867	6207	6376*	6546	6715*	6885	7055	7224*	7394*	7564	7734	17	34	51	68	85
,868	7904	8074	8244	8414	8584	8754	8924	9094*	9264*	9434*	17	34	51	68	85
,869	9605	9775*	9945*	0116	0286*	0457	0627*	0798	0968*	**74**1139*	17	34	51	68	85
,87	**74**1310	1480*	1651*	1822	1993	2164	2335	2506	2677	2848	17	34	51	68	85
,871	3019	3190	3361	3532*	3703*	3875	4046	4217*	4389	4560*	17	34	51	69	86
,872	4731*	4903	5075	5246*	5418	5589*	5761*	5933	6105	6276*	17	34	51	69	86
,873	6448*	6620*	6792*	6964*	7136*	7308*	7480*	7652*	7825	7997	17	34	52	69	86
,874	8169*	8341*	8514	8686	8858*	9031	9203*	9376	9548*	9721*	17	34	52	69	86
,875	9894	0066*	0239*	0412	0585	0758	0930*	1103*	1276*	**75**1449*	17	35	52	69	86
,876	**75**1622*	1795*	1969	2142	2315	2488*	2662	2835	3008*	3182	17	35	52	69	87
,877	3355*	3529	3702*	3876	4049*	4223	4397	4570*	4744*	4918	17	35	52	69	87

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
,878	5092	5266	5440	5614	5788	5962	6136	6310	6484	6658*	17	35	52	70	87
,879	6832*	7007	7181*	7355*	7530	7704*	7879	8053*	8228	8402*	17	35	52	70	87
,88	8577*	8752	8926*	9101*	9276*	9451	9626	9801	9976	**76**0151	17	35	52	70	87
,881	**76**0326	0501	0676*	0851*	1026*	1202	1377	1552*	1728	1903*	18	35	53	70	88
,882	2079	2254*	2430	2605*	2781	2956*	3132*	3308	3484	3659*	18	35	53	70	88
,883	3835*	4011*	4187*	4363*	4539*	4715*	4891*	5067*	5244	5420	18	35	53	70	88
,884	5596*	5772*	5949	6125*	6302	6478*	6655	6831*	7008	7184*	18	35	53	71	88
,885	7361	7538	7714*	7891*	8068*	8245	8422	8599	8776	8953	18	35	53	71	88
,886	9130	9307*	9484*	9661*	9839	0016	0193*	0371	0548*	**77**0725*	18	35	53	71	89
,887	**77**0903	1080*	1258*	1436	1613*	1791*	1969	2147	2324*	2502*	18	36	53	71	89
,888	2680*	2858*	3036	3214*	3392*	3570*	3748*	3927	4105	4283	18	36	53	71	89
,889	4461*	4640	4818*	4996*	5175	5353*	5532	5711	5889*	6068	18	36	54	71	89
,89	6247	6425*	6604*	6783*	6962	7141	7320	7499	7678	7857	18	36	54	72	89
,891	8036*	8215*	8394*	8574	8753	8932*	9112	9291*	9471	9650*	18	36	54	72	90
,892	9830	0009*	0189	0368*	0548*	0728	0908	1088	1267*	**78**1447*	18	36	54	72	90
,893	**78**1627*	1807*	1987*	2167*	2348	2528	2708	2888*	3068*	3249	18	36	54	72	90
,894	3429*	3610	3790*	3971	4151*	4332	4512*	4693	4874	5054*	18	36	54	72	90
,895	5235*	5416	5597	5778	5959	6140	6321	6502	6683	6864*	18	36	54	72	90
,896	7045*	7227	7408	7589*	7771	7952	8133*	8315	8496*	8678	18	36	54	73	91
,897	8860	9041*	9223	9405	9587	9768*	9950*	0132*	0314*	**79**0496*	18	36	55	73	91
,898	**79**0678*	0860*	1042*	1224*	1407	1589	1771*	1954	2136	2318*	18	36	55	73	91
,899	2501	2683*	2866	3048*	3231*	3414	3596*	3779*	3962*	4145	18	37	55	73	91
,9	4328	4511	4694	4877	5060	5243	5426	5609*	5792*	5976	18	37	55	73	92

,901	6159	6342*	6526	6709*	6892*	7076	7260	7443*	7627	7810*	18	37	55	73	92
,902	7994*	8178	8362	8546	8730	8913*	9097*	9281*	9466	9650	18	37	55	74	92
,903	9834	0018	0202*	0386*	0571	0755*	0940	1124	1308*	801493	18	37	55	74	92
,904	801678	1862*	2047	2232	2416*	2601*	2786	2971	3156	3341	18	37	55	74	92
,905	3526	3711	3896	4081	4266*	4451*	4637	4822	5007*	5193	19	37	56	74	93
,906	5378	5563*	5749	5934*	6120*	6306	6491*	6677*	6863	7049	19	37	56	74	93
,907	7235	7420*	7606*	7792*	7978*	8164*	8351	8537	8723	8909*	19	37	56	74	93
,908	9095*	9282	9468*	9654*	9841	0027*	0214	0401	0587*	810774	19	37	56	75	93
,909	810961	1147*	1334*	1521	1708	1895	2082	2269	2456	2643	19	37	56	75	93
,91	2830*	3017*	3204*	3392	3579*	3766*	3954	4141*	4329	4516*	19	37	56	75	94
,911	4704	4891*	5079*	5267	5455	5642*	5830*	6018	6206	6394	19	38	56	75	94
,912	6582	6770	6958*	7146*	7334*	7523	7711	7899*	8087*	8276	19	38	56	75	94
,913	8464*	8653	8841*	9030	9218*	9407*	9596	9785	9973*	820162*	19	38	57	75	94
,914	820351*	0540	0729	0918	1107	1296*	1485*	1674*	1864	2053	19	38	57	76	95
,915	2242*	2432	2621	2810*	3000	3189*	3379	3569	3758*	3948	19	38	57	76	95
,916	4138	4327*	4517*	4707*	4897*	5087	5277	5467*	5657*	5847*	19	38	57	76	95
,917	6037*	6228	6418	6608*	6799	6989*	7179*	7370	7560*	7751*	19	38	57	76	95
,918	7942	8132*	8323*	8514	8705	8895*	9086*	9277*	9468*	9659*	19	38	57	76	95
,919	9850*	0041*	0233	0424	0615	0806*	0998	1189	1380*	831572	19	38	57	77	96
,92	831763*	1955	2146*	2338*	2530	2721*	2913*	3105	3297	3489	19	38	58	77	96
,921	3681	3873	4065	4257	4449	4641*	4833*	5026	5218	5410*	19	38	58	77	96
,922	5603	5795	5987*	6180	6372*	6565*	6758	6950*	7143*	7336	19	39	58	77	96
,923	7529	7722	7915	8108	8301	8494	8687	8880	9073	9266*	19	39	58	77	97
,924	9459*	9653	9846*	0040	0233*	0427	0620*	0814	1007*	841201	19	39	58	77	97
,925	841395	1588*	1782*	1976*	2170	2364	2558	2752	2946	3140*	19	39	58	78	97
,926	3334*	3528*	3723	3917*	4111*	4306	4500*	4695	4889*	5084	19	39	58	78	97
,927	5278*	5473*	5668	5862*	6057*	6252*	6447	6642	6837	7032	19	39	58	78	97
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Продолжение табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,928	7227	7422*	7617*	7812*	8008	8203	8398*	8594	8789*	8984*	20	39	59	78	98
,929	9180	9376	9571*	9767	9962*	0158*	0354	0550	0746	**85**0942	20	39	59	78	98
,93	**85**1138	1334	1530	1726	1922	2118*	2314*	2511	2707	2903*	20	39	59	78	98
,931	3100	3296*	3493	3689*	3886	4082*	4279*	4476	4673	4869*	20	39	59	79	98
,932	5066*	5263*	5460*	5657*	5854*	6051*	6248*	6446	6643	6840*	20	39	59	79	99
,933	7037*	7235	7432*	7630	7827*	8025	8222*	8420	8618	8815*	20	40	59	79	99
,934	9013*	9211	9409	9607	9805	0003	0201	0399	0597	**860**795*	20	40	59	79	99
,935	**860**993*	1192	1390	1588*	1787	1985*	2184	2382*	2581	2779*	20	40	60	79	99
,936	2978*	3177	3376	3574*	3773*	3972*	4171*	4370*	4569*	4768*	20	40	60	80	99
,937	4967*	5167	5366	5565*	5764*	5964	6163*	6363	6562*	6762	20	40	60	80	100
,938	6961*	7161*	7361	7560*	7760*	7960*	8160	8360	8560	8760	20	40	60	80	100
,939	8960	9160*	9360*	9560*	9761	9961	0161*	0362	0562*	**87**0763	20	40	60	80	100
,94	**87**0963*	1164	1364*	1565	1766	1966*	2167*	2368*	2569	2770	20	40	60	80	100
,941	2971	3172	3373	3574*	3775*	3976*	4178	4379*	4580*	4782	20	40	60	80	101
,942	4983*	5185	5386*	5588	5790	5991*	6193	6395	6597	6798*	20	40	61	81	101
,943	7000*	7202*	7404*	7606*	7808*	8011	8213	8415*	8617*	8820	20	40	61	81	101
,944	9022*	9224*	9427	9629*	9832	0035	0237*	0440	0643	**88**0846	20	41	61	81	101
,945	**88**1048*	1251*	1454*	1657*	1860*	2063*	2266*	2470	2673	2876*	20	41	61	81	102
,946	3079*	3283	3486*	3690	3893*	4097	4300*	4504	4708	4911*	20	41	61	81	102
,947	5115*	5319	5523	5727	5931	6135	6339	6543	6747*	6951*	20	41	61	82	102
,948	7156	7360	7564*	7769	7973	8177*	8382*	8587	8791*	8996	20	41	61	82	102
,949	9201	9405*	9610*	9815*	0020	0225	0430	0635	0840*	**89**1045*	20	41	61	82	102
,95	**89**1250*	1456	1661	1866*	2072	2277*	2483	2688*	2894	3099*	21	41	62	82	103

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
,951	3305	3511	3716*	3922*	4128*	4334*	4540	4746	4952*	5158*	21	41	62	82	103
,952	5364*	5570*	5777	5983	6189*	6396	6602*	6809	7015*	7222	21	41	62	83	103
,953	7428*	7635	7842	8048*	8255*	8462*	8669	8876	9083	9290	21	41	62	83	103
,954	9497*	9704*	9911*	0119	0326	0533*	0741	0948*	1156	**90**1363*	21	41	62	83	104
,955	**90**1571	1778*	1986	2194	2401*	2609*	2817*	3025	3233	3441	21	42	62	83	104
,956	3649	3857*	4065*	4273*	4482	4690	4898*	5107	5315*	5524	21	42	62	83	104
,957	5732*	5941	6149*	6358	6567	6775*	6984*	7193*	7402*	7611*	21	42	63	84	104
,958	7820*	8029*	8238*	8447*	8657	8866	9075*	9284*	9494	9703*	21	42	63	84	105
,959	9913	0122*	0332	0542	0751*	0961	1171	1381	1590*	**91**1800*	21	42	63	84	105
,96	**91**2010*	2220*	2430*	2641	2851	3061	3271*	3482	3692	3902*	21	42	63	84	105
,961	4113	4323*	4534	4744*	4955*	5166	5377	5587*	5798*	6009*	21	42	63	84	105
,962	6220	6431	6642*	6853*	7064*	7275*	7487	7698	7909*	8121	21	42	63	84	106
,963	8332*	8544	8755*	8967	9178*	9390	9602	9813*	0025*	**92**0237*	21	42	64	85	106
,964	**92**0449*	0661*	0873*	1085*	1297*	1509*	1722	1934	2146*	2359	21	42	64	85	106
,965	2571	2783*	2996	3208*	3421*	3634	3846*	4059*	4272	4485	21	43	64	85	106
,966	4698	4911	5124	5337	5550	5763	5976*	6189*	6403	6616	21	43	64	85	107
,967	6829*	7043	7256*	7470	7683*	7897	8111	8324*	8538*	8752*	21	43	64	85	107
,968	8966	9180	9394	9608	9822	0036*	0250*	0464*	0679	**93**0893*	21	43	64	86	107
,969	**93**1107*	1322	1536*	1751	1965*	2180	2395	2609*	2824*	3039	21	43	64	86	107
,97	3254	3469	3684	3899	4114	4329	4544*	4759*	4975	5190	22	43	65	86	108
,971	5405*	5621	5836*	6052	6267*	6483	6698*	6914*	7130	7346	22	43	65	86	108
,972	7562	7777*	7993*	8209*	8425*	8642	8858	9074	9290*	9506*	22	43	65	86	108
,973	9723	9939*	0156	0372*	0589	0805*	1022	1239	1455*	**94**1672*	22	43	65	87	108
,974	**94**1889*	2106	2323	2540	2757*	2974*	3191*	3408*	3626	3843*	22	43	65	87	109
,975	4060*	4278	4495*	4713	4930*	5148	5366	5583*	5801*	6019	22	44	65	87	109
,976	6237	6455	6673	6891	7109	7327	7545	7763*	7981*	8200	22	44	65	87	109
,977	8418	8636*	8855	9073*	9292	9510*	9729*	9948	0167	**95**0385*	22	44	66	87	109
,978	**95**0604*	0823*	1042*	1261*	1480*	1699*	1919	2138	2357	2576*	22	44	66	88	110
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Окончание табл. IX.3

	Десятичные антилогарифмы										Поправки				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5
,979	2796	3015*	3235	3454*	3674	3893*	4113	4333	4552*	4772*	22	44	66	88	110
,98	4992*	5212*	5432	5652	5872*	6092*	6312*	6533	6753	6973*	22	44	66	88	110
,981	7194	7414	7634*	7855*	8076	8296*	8517	8738	8958*	9179*	22	44	66	88	110
,982	9400*	9621*	9842*	0063*	0284*	0505*	0727	0948	1169*	**96**1390*	22	44	66	88	111
,983	**96**1612	1833*	2055	2276*	2498	2720	2941*	3163	3385	3607	22	44	66	89	111
,984	3829	4050*	4272*	4495	4717	4939	5161*	5383*	5606	5828	22	44	67	89	111
,985	6050*	6273	6495*	6718	6941	7163*	7386	7609	7832	8054*	22	45	67	89	111
,986	8277*	8500*	8723*	8946*	9170	9393	9616*	9839*	0063	**97**0286*	22	45	67	89	112
,987	**97**0509*	0733	0957	1180*	1404	1627*	1851*	2075*	2299	2523	22	45	67	89	112
,988	2747	2971	3195	3419	3643*	3867*	4092	4316	4540*	4765	22	45	67	90	112
,989	4989*	5214	5438*	5663	5888	6112*	6337*	6562	6787	7012	22	45	67	90	112
,99	7237	7462	7687	7912*	8137*	8362*	8588	8813*	9039	9264	23	45	68	90	113
,991	9489*	9715*	9941	0166*	0392*	0618	0844	1070	1295*	**98**1521*	23	45	68	90	113
,992	**98**1747*	1974	2200	2426	2652*	2878*	3105	3331*	3558	3784*	23	45	68	91	113
,993	4011	4237*	4464	4691	4917*	5144*	5371*	5598	5825	6052	23	45	68	91	113
,994	6279	6506*	6733*	6961	7188	7415*	7643	7870	8097*	8325	23	45	68	91	114
,995	8553	8780*	9008	9236	9464	9691*	9919*	0147*	0375*	**99**0603*	23	46	68	91	114
,996	**99**0831*	1060	1288	1516*	1744*	1973	2201*	2430	2658*	2887	23	46	69	91	114
,997	3116	3344*	3573*	3802	4031	4260	4489	4718	4947	5176	23	46	69	92	114
,998	5405	5634*	5863*	6093	6322*	6552	6781*	7011	7240*	7470	23	46	69	92	115
,999	7700	7929*	8159*	8389	8619	8849	9079	9309	9539*	9769*	23	46	69	92	115
1,0	**10**0000	0023	0046	0069	0092	0115	0138	0161	0184	0207	23	46	69	92	115
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	1	2	3	4	5

Таблица IX.3 «Десятичные антилогарифмы» позволяет решить обратную логарифмированию задачу: по значению логарифма определить число, которому этот логарифм соответствует. Естественно, что таблица составлена для значений мантисс логарифмов, которые позволяют найти соответствующие им числа из интервала от 1 до 10, т. е. с точностью до порядка. Зная мантиссу, нужно воспользоваться значением характеристики и тем самым учесть реальный порядок искомого числа. В таблицу сведены числа, соответствующие значениям мантисс от 0,0001 до 0,9999 с шагом 0,0001. Поправки позволяют получить значения чисел для мантисс с шагом, на порядок меньшим, т.е. 0,00001. Поправки даны для последних цифр искомых чисел и соответствуют последней (пятой после запятой) цифре мантиссы, если эта цифра 1, 2, 3, 4, 5. Поправки прибавляют к табличному значению. Если же нужно найти исходное число для мантисс, оканчивающихся на 6, 7, 8 и 9, то из следующего табличного значения вычитают соответственно поправку на 4, 3, 2 и 1.

Пример 6. Найти число, логарифм которого равен 3,15784.

Мантисса данного логарифма равна 0,15784. В таблице IX.3 на пересечении строки 157 и столбца 8 находим значение 1438136. Воспользуемся поправкой (в этой же строке) из столбца 4 поправок. Она равна 132. Таким образом, имеем 1438268. С учетом характеристики, равной 3, находим искомое число. Оно равно 1438,268.

Пример 7. Найти число, логарифм которого равен $-1,65582$.

Мантисса логарифма равна $1 - 0,65582 = 0,34418$, а его характеристика равна -2. На пересечении строки 344 и столбца 2 найдем 2209021*, а с учетом (*) получим 2209022. Вычтем поправку, соответствующую значению 2. Она равна 102. Получим 2208920. С учетом значения характеристики получим искомое число: 0,02208920.

Натуральные и двоичные логарифмы.

Нет необходимости приводить специальные таблицы натуральных и двоичных логарифмов, а также логарифмов по другим основаниям. Таблицы IX.2 и IX.3 позволяют работать с логарифмами, имеющими основания, отличные от 10.

Чтобы найти натуральный логарифм числа A, нужно воспользоваться формулой перехода к новому основанию e:

$$\ln A = \frac{\lg A}{\lg e},$$

где коэффициент $\frac{1}{\lg e} = M = 2{,}302585$ есть *модуль перехода* от десятичных логарифмов к *натуральным*.

Таким образом, значения натуральных логарифмов получают из значений десятичных логарифмов умножением на коэффициент M.

На коэффициент M умножают значение десятичного логарифма, а не его мантиссы!

При обратном переходе от натуральных логарифмов к десятичным используется коэффициент $\frac{1}{M} = \lg e = 0{,}434294.$

Итак, для определения натурального логарифма числа A выполняют следующие действия: заносят в память калькулятора коэффициент M; с помощью таблицы IX.2 определяют мантиссу десятичного логарифма числа A и учитывают характеристику этого логарифма; заносят значение десятичного логарифма числа A в калькулятор и производят умножение этого значения на число M. Результат и есть натуральный логарифм числа A. Аналогично осуществляется обратный переход.

Пример 8. Найти натуральный логарифм числа 327,84.

Характеристика десятичного логарифма числа 327,84 равна 2. Из таблицы IX.2 найдем значение мантиссы. Оно равно 0,515662. Таким образом, $\lg 327{,}84 = 2{,}515662$. Поэтому

$$\ln 327{,}84 = M \cdot 2{,}515662 = 2{,}302585 \cdot 2{,}515662 = 5{,}792526.$$

Пример 9. Дано: $\ln A = 3{,}24122$. Найти число A.

Находим

$$\lg A = \frac{1}{M} \cdot \ln A = 0{,}434294 \cdot 3{,}24122 = 1{,}40764.$$

Теперь воспользуемся таблицей IX.3 и найдем число, соответствующее мантиссе 0,40764. Получим 255647. Так как характеристика десятичного логарифма равна 1, то $A = 25{,}5647$.

С двоичными логарифмами можно работать, как с натуральными. Модуль перехода от десятичных логарифмов к *двоичным* логарифмам определяется из соотношения

$$\log_2 A = \frac{\lg A}{\lg 2}$$

и равен $\frac{1}{\lg 2} = 3{,}321928$, а модуль обратного перехода есть $\lg 2 = 0{,}301030.$

Пример 10. Найти $\log_2 327{,}84$.

Значение $\lg 327{,}84$ возьмем из примера 6 и умножим на модуль перехода $\dfrac{1}{\lg 2}$:

$$\log_2 327{,}84 = 3{,}32193 \cdot \lg 327{,}84 = 3{,}32193 \cdot 2{,}51566 = 8{,}35685.$$

Пример 11. Двоичный логарифм числа A равен 5,32118. Найти A. Запишем:

$$\lg A = \lg 2 \cdot \log_2 A = 0{,}301030 \cdot 5{,}32118 = 1{,}60183.$$

Воспользуемся таблицей IX.3 и для мантиссы 0,60183 найдем соответствующее ей число. Оно равно 779474. С учетом того, что характеристика десятичного логарифма числа A равна 1, получим $A = 77{,}9474$.

Таблица IX.4

СИНУСЫ И КОСИНУСЫ

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
											0,000000	90°			
0°	0,000000	0290*	0581*	0872*	1163*	1454	1745	2036	2327	2618	2908*	50′	48	97	145
10′	2908*	3199*	3490*	3781*	4072	4363	4654	4945	5235*	5526*	5817*	40′	48	97	145
20′	5817*	6108*	6399	6690	6981	7272	7563	7853*	8144*	8435*	8726*	30′	48	97	145
30′	8726*	9017	9308	9599	9890	0180*	0471*	0762*	1053*	1344	0,011635	20′	48	97	145
40′	0,011635	1926	2217	2507*	2798*	3089*	3380	3671	3962	4253	4543*	10′	48	97	145
50′	4543*	4834*	5125*	5416	5707	5998	6289	6579*	6870*	7161*	7452	89°	48	97	145
1°	7452	7743	8034	8324*	8615*	8906*	9197	9488	9779	0069*	0,020360*	50′	48	97	145
10′	0,020360*	0651*	0942	1233	1524	1814*	2105*	2396*	2687	2978	3268*	40′	48	97	145
20′	3268*	3559*	3850*	4141	4432	4722*	5013*	5304*	5595	5886	6176*	30′	48	97	145
30′	6176*	6467*	6758*	7049	7340	7630*	7921*	8212	8503	8793*	9084*	20′	48	97	145
40′	9084*	9375	9666	9957	0247*	0538*	0829	1120	1410*	1701*	0,031992	10′	48	97	145
50′	0,031992	2282*	2573*	2864	3155	3445*	3736*	4027	4318	4608*	4899	88°	48	97	145
2°	4899	5190	5480*	5771*	6062	6353	6643*	6934	7225	7515*	7806	50′	48	97	145
10′	7806	8097	8387*	8678	8969	9259*	9550	9841	0131*	0422	0,040713	40′	48	97	145
20′	0,040713	1003*	1294	1585	1875*	2166	2456*	2747*	3038	3328*	3619	30′	48	97	145
30′	3619	3910	4200*	4491	4781*	5072	5362*	5653*	5944	6234*	6525	20′	48	97	145
40′	6525	6815*	7106	7397	7687*	7978	8268*	8559	8849*	9140	9430*	10′	48	97	145
50′	9430*	9721	0011*	0302	0592*	0883	1173*	1464	1754*	2045	0,052335*	87°	48	97	145
3°	0,052335*	2626	2916*	3207	3497*	3788	4078*	4369	4659*	4950	5240*	50′	48	97	145
10′	5240*	5531	5821*	6111*	6402	6692*	6983	7273*	7564	7854	8144*	40′	48	97	145

20′	8144*	8435	8725*	9016	9306	9596*	9887	0177	0467*	0758	0,061048*	30′	48	97	145
30′	0,061048*	1338*	1629	1919*	2209*	2500	2790*	3080*	3371	3661	3951*	20′	48	97	145
40′	3951*	4242	4532	4822*	5112*	5403	5693	5983*	6273*	6564	6854	10′	48	97	145
50′	6854	7144*	7434*	7725	8015	8305*	8595*	8885*	9176	9466	9756	86°	48	97	145
4°	9756	0046*	0336*	0626*	0917	1207	1497	1787*	2077*	2367*	0,072657*	50′	48	97	145
10′	0,072657*	2948	3238	3528	3818	4108	4398*	4688*	4978*	5268*	5558*	40′	48	97	145
20′	5558*	5848*	6138*	6429	6719	7009	7299	7589	7879	8169	8459	30′	48	97	145
30′	8459	8749	9039	9329	9619	9908*	0198*	0488*	0778*	1068*	0,081358*	20′	48	97	145
40′	0,081358*	1648*	1938*	2228	2518	2808	3098	3387*	3677*	3967*	4257*	10′	48	97	145
50′	4257*	4547	4837	5127	5416*	5706*	5996*	6286	6576	6865*	7155*	85°	48	97	145
5°	7155*	7445*	7735	8025	8314*	8604*	8894	9184	9473*	9763	0,090053	50′	48	97	145
10′	0,090053	0342*	0632*	0922	1211*	1501*	1791	2080*	2370*	2660	2949*	40′	48	97	145
20′	2949*	3239	3529	3818*	4108	4397*	4687	4977	5266*	5556	5845*	30′	48	97	145
30′	5845*	6135	6424*	6714	7003*	7293	7582*	7872	8161*	8451	8740*	20′	48	97	145
40′	8740*	9030	9319*	9609	9898*	0188	0477	0766*	1056	1345*	0,101635	10′	48	96	145
50′	0,101635	1924	2213*	2503	2792*	3081*	3371	3660*	3949*	4239	4528	84°	48	96	145
6°	4528	4817*	5107	5396	5685*	5974*	6264	6553	6842*	7131*	7420*	50′	48	96	145
10′	7420*	7710	7999	8288*	8577*	8866*	9156	9445	9734	0023	0,110312*	40′	48	96	145
20′	0,110312*	0601*	0890*	1179*	1468*	1758	2047	2336	2625	2914	3203	30′	48	96	145
30′	3203	3492	3781	4070	4359	4648	4937	5226	5515	5803*	6092*	20′	48	96	144
40′	6092*	6381*	6670*	6959*	7248*	7537	7826	8115	8403*	8692*	8981*	10′	48	96	144
50′	8981*	9270	9559	9848	0136*	0425*	0714	1003	1291*	1580*	0,121869	83°	48	96	144
7°	0,121869	2158	2446*	2735	3024	3312*	3601	3890	4178*	4467	4756	50′	48	96	144
10′	4756	5044*	5333	5621*	5910	6198*	6487*	6776	7064*	7353	7641*	40′	48	96	144
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		10″	20″	30″
						Косинусы									

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
20′	7641*	7930	8218*	8507	8795*	9084	9372*	9660*	9949	0237*	**0,13**0526	30′	48	96	144
30′	**0,13**0526	0814*	1102*	1391	1679*	1968	2256	2544*	2833	3121	3409*	20′	48	96	144
40′	3409*	3697*	3986	4274	4562*	4850*	5139	5427	5715*	6003*	6291*	10′	48	96	144
50′	6291*	6580	6868	7156	7444*	7732*	8020*	8308*	8596*	8885	9173	82°	48	96	144
8°	9173	9461	9749	0037	0325	0613	0901	1189	1477	1765	**0,14**2053	50′	48	96	144
10′	**0,14**2053	2341	2628*	2916*	3204*	3492*	3780	4068	4356	4644	4931*	40′	48	96	144
20′	4931	5219*	5507	5795	6083	6370*	6658*	6946	7234	7521*	7809	30′	48	96	144
30′	7809	8097	8384*	8672	8960	9247*	9535	9822*	0110*	0398	**0,15**0685*	20′	48	96	144
40′	**0,15**0685*	0973	1260*	1548	1835*	2123	2410*	2698	2985*	3273	3560*	10′	48	96	144
50′	3560*	3848	4135*	4423	4710	4997*	5285	5572	5859*	6147	6434	81°	48	96	144
9°	6434	6721*	7009	7296	7583*	7870*	8158	8445	8732	9019*	9306*	50′	48	96	144
10′	9306*	9594	9881	0168	0455	0742*	1029*	1316*	1603*	1890*	**0,16**2177*	40′	48	96	144
20′	**0,16**2177*	2464*	2751*	3038*	3325*	3612*	3899*	4186*	4473*	4760*	5047*	30′	48	96	143
30′	5047*	5334	5621	5908	6195	6481*	6768*	7055*	7342	7629	7915*	20′	48	96	143
40′	7915*	8202*	8489	8776	9062*	9349*	9636	9922*	0209	0496	**0,17**0782*	10′	48	96	143
50′	**0,17**0782*	1069	1355*	1642*	1929	2215*	2502	2788*	3075	3361*	3648	80°	48	96	143
10°	3648	3934*	4221	4507*	4793*	5080	5366*	5653	5939	6225*	6512	50′	48	95	143
10′	6512	6798	7084*	7371	7657	7943*	8229*	8516	8802	9088	9374*	40′	48	95	143
20′	9374*	9660*	9946*	0233	0519	0805	01091	1377	1663	1949*	**0,18**2235*	30′	48	95	143
30′	**0,18**2235*	2521*	2807*	3093*	3379	3665	3951	4237	4523	4809	5094*	20′	48	95	143
40′	5094*	5380*	5666*	5952	6238	6524	6809*	7095*	7381	7667	7952*	10′	48	95	143
50′	7952*	8238	8524	8809*	9095	9381	9666*	9952	0237*	0523	**0,19**0809*	79°	48	95	143
11°	**0,19**0809*	1094*	1380	1665*	1951	2236*	2521*	2807	3092*	3378	3663*	50′	48	95	143
10′	3663*	3949	4234	4519*	4805	5090	5375*	5660*	5946	6231	6516*	40′	48	95	143
20′	6516*	6801*	7087	7372	7657	7942	8227*	8512*	8797*	9082*	9367*	30′	48	95	143
30′	9367*	9652*	9938	0223	0508	0792*	1077*	1362*	1647*	1932*	**0,20**2217*	20′	47	95	142

40′	0,202217*	2502	2787	3072	3356*	3641*	3926*	4211	4496	4780*	5065	10′	47	95	142
50′	5065	5350	5634*	5919*	6204	6488*	6773	7058	7342*	7627	7911*	78°	47	95	142
12°	7911*	8196	8480*	8765	9049*	9334	9618*	9902*	0187	0471*	0,210756	50′	47	95	142
10′	0,210756	1040	1324*	1609	1893	2177*	2461*	2746	3030	3314*	3598*	40′	47	95	142
20′	3598*	3882*	4167	4451	4735	5019	5303	5587*	5871*	6155*	6439*	30′	47	95	142
30′	6439*	6723*	7007*	7291*	7575	7859	8143	8427	8710*	8994*	9278*	20′	47	95	142
40′	9278*	9562	9846	0129*	0413*	0697	0981	1264*	1548	1832	0,222115*	10′	47	95	142
50′	0,222115*	2399	2682*	2966*	3250	3533*	3817	4100*	4384	4667*	4951	77°	47	95	142
13°	4951	5234	5517*	5801	6084*	6367*	6651	6934*	7217*	7501	7784	50′	47	94	142
10′	7784	8067*	8350*	8634	8917	9200	9483*	9766*	0049*	0332*	0,230615*	40′	47	94	142
20′	0,230615*	0898*	1181*	1464*	1747*	2030*	2313*	2596*	2879*	3162*	3445	30′	47	94	141
30′	3445	3728	4011	4293*	4576*	4859	5142	5424*	5707*	5990	6272*	20′	47	94	141
40′	6272*	6555*	6838	7120*	7403	7685*	7968	8250*	8533	8815*	9098	10′	47	94	141
50′	9098	9380*	9663	9945*	0228	0510	0792*	1075	1357	1639*	0,241921*	76°	47	94	141
14°	0,241921*	2204	2486	2768*	3050*	3332*	3615	3897	4179	4461	4743	50′	47	94	141
10′	4743	5025	5307	5589	5871	6153	6435	6717	6999	7280*	7562*	40′	47	94	141
20′	7562*	7844*	8126	8408	8689*	8971*	9253	9535	9816*	0098	0,250380	30′	47	94	141
30′	0,250380	0661*	0943	1224*	1506	1787*	2069	2350*	2632	2913*	3195	20′	47	94	141
40′	3195	3476*	3757*	4039	4320*	4601*	4883	5164*	5445*	5726*	6008	10′	47	94	141
50′	6008	6289	6570*	6851*	7132*	7413*	7694*	7976	8257	8538	8819	75°	47	94	141
15°	8819	9100	9380*	9661*	9942*	0223*	0504*	0785	1066	1346*	0,261627*	50′	47	94	140
10′	0,261627*	1908	2189	2469*	2750*	3031	3311*	3592	3873	4153*	4434	40′	47	94	140
20′	4434	4714*	4995	5275*	5556	5836*	6116*	6397	6677*	6958	7238	30′	47	93	140
30′	7238	7518*	7798*	8079	8359	8639*	8919*	9199*	9480	9760	0,270040	20′	47	93	140
40′	0,270040	0320	0600	0880	1160	1440	1720	2000	2280	2560	2840	10′	47	93	140
50′	2840	3119*	3399*	3679	3959	4238*	4518*	4798	5078	5357*	5637	74°	47	93	140
16°	5637	5916*	6196*	6476	6755*	7035	7314*	7594	7873*	8152*	8432	50′	47	93	140
10′	8432	8711*	8991	9270	9549*	9829	0108	0387*	0666*	0945*	0,281225	40′	47	93	140
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		10″	20″	30″
	Косинусы														

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
20′	**0,28**1225	1504	1783	2062	2341	2620	2899*	3178*	3457	3736	4015	30′	47	93	140
30′	4015	4294	4573	4851*	5130*	5409*	5688	5967	6245*	6524*	6803	20′	46	93	139
40′	6803	7081*	7360*	7639	7917*	8196	8474*	8753	9031*	9310	9588*	10′	46	93	139
50′	9588*	9867	0145	0423*	0702	0980*	1258*	1537	1815	2093*	**0,29**2371*	73°	46	93	139
17°	**0,29**2371*	2649*	2928	3206	3484	3762	4040	4318	4596	4874	5152	50′	46	93	139
10′	5152	5430	5708	5985*	6263*	6541*	6819	7097	7374*	7652*	7930	40′	46	93	139
20′	7930	8207*	8485*	8763	9040*	9318	9595*	9873	0150*	0428	**0,30**0705*	30′	46	93	139
30′	**0,30**0705*	0983	1260*	1537*	1815	2092*	2369*	2647	2924	3201*	3478*	20′	46	92	139
40′	3478*	3755*	4033	4310	4587	4864	5141	5418	5695	5972	6249	10′	46	92	139
50′	6249	6526	6802*	7079*	7356*	7633	7910	8186*	8463*	8740	9017	72°	46	92	138
18°	9017	9293*	9570	9846*	0123	0399*	0676	0952*	1229	1505*	**0,31**1782	50′	46	92	138
10′	**0,31**1782	2058*	2334*	2611	2887*	3163*	3440	3716	3992	4268*	4544*	40′	46	92	138
20′	4544*	4820*	5096*	5373	5649	5925	6201	6476*	6752*	7028*	7304*	30′	46	92	138
30′	7304*	7580	7856	8132	8407*	8683*	8959	9235	9510*	9786	**0,32**0061*	20′	46	92	138
40′	**0,32**0061*	0337	0613	0888*	1164	1439	1714*	1990	2265*	2541	2816	10′	46	92	138
50′	2816	3091*	3366*	3642	3917	4192*	4467*	4742*	5018	5293	5568	71°	46	92	138
19°	5568	5843	6118	6393	6668	6943	7217*	7492*	7767*	8042	8317	50′	46	92	137
10′	8317	8591*	8866*	9141	9416	9690*	9965	0239*	0514	0788*	**0,33**1063	40′	46	92	137
20′	**0,33**1063	1337*	1612	1886*	2161	2435	2709*	2984	3258	3532*	3806*	30′	46	91	137
30′	3806*	4081	4355	4629	4903	5177*	5451*	5725*	5999*	6273*	6547	20′	46	91	137
40′	6547	6821	7095	7369	7642*	7916*	8190	8464	8737*	9011*	9285	10′	46	91	137
50′	9285	9558*	9832	0106	0379*	0653	0926*	1199*	1473	1746*	**0,34**2020	70°	46	91	137
20°	**0,34**2020	2293	2566*	2840	3113	3386*	3659*	3932*	4205*	4479	4752	50′	46	91	137
10′	4752	5025	5298	5571	5844	6117	6389*	6662*	6935*	7208	7481	40′	45	91	136
20′	7481	7753*	8026*	8299	8572	8844*	9117	9389*	9662	9934*	**0,35**0207	30′	45	91	136

30′	0,350207	0479*	0752	1024*	1297	1569	1841*	2113*	2386	2658	2930*	20′	45	91	136
40′	2930*	3202*	3474*	3746*	4019	4291	4563	4835	5106*	5378*	5650*	10′	45	91	136
50′	5650*	5922*	6194	6466	6738	7009*	7281	7553	7824*	8096	8367*	69°	45	91	136
21°	8367*	8639*	8911	9182*	9453*	9725	9996*	0268	0539*	0810*	0,361082	50′	45	90	136
10′	0,361082	1353	1624*	1895*	2166*	2438	2709	2980	3251	3522	3793	40′	45	90	136
20′	3793	4064	4335	4605*	4876*	5147*	5418	5689	5959*	6230*	6501	30′	45	90	135
30′	6501	6771*	7042	7313	7583*	7854	8124*	8395	8665	8935*	9206	20′	45	90	135
40′	9206	9476	9746*	0017	0287	0557	0827*	1097*	1367*	1637*	0,371907*	10′	45	90	135
50′	0,371907*	2177*	2447*	2717*	2987*	3257*	3527*	3797	4067	4336*	4606*	68°	45	90	135
22°	4606*	4876	5145*	5415*	5685	5954*	6224	6493*	6763	7032*	7302	50′	45	90	135
10′	7302	7571	7840*	8110	8379	8648*	8917*	9187	9456	9725	9994	40′	45	90	135
20′	9994	0263	0532	0801	1070	1339	1608	1877	2145*	2414*	0,382683	30′	45	90	134
30′	0,382683	2952	3220*	3489*	3758	4026*	4295	4563*	4832	5100*	5369	20′	45	90	134
40′	5369	5637*	5906	6174	6442*	6710*	6979	7247	7515*	7783*	8051*	10′	45	89	134
50′	8051*	8319*	8587*	8855*	9123*	9391*	9659*	9927*	0195*	0463	0,390731	67°	45	89	134
23°	0,390731	998*	1266*	1534	1801*	2069*	2337	2604*	2872	3139*	3407	50′	45	89	134
10′	3407	3674*	3941*	4209	4476*	4743*	5011	5278	5545*	5812*	6079*	40′	45	89	134
20′	6079*	6346*	6613*	6880*	7147*	7414*	7681*	7948*	8215	8482	8749	30′	44	89	133
30′	8749	9015*	9282*	9549	9815*	0082	0349	0615*	0882	1148*	0,401415*	20′	44	89	133
40′	0,401415*	1681	1947*	2214	2480	2746*	3012*	3279	3545	3811	4077*	10′	44	89	133
50′	4077*	4343*	4609*	4875*	5141*	5407*	5673	5939	6205	6470*	6736*	66°	44	89	133
24°	6736	7002	7268	7533*	7799	8064*	8330	8595*	8861	9126*	9392	50′	44	89	133
10′	9392	9657*	9923	0188	0453*	0718*	0984	1249	1514	1779	0,412044*	40′	44	88	133
20′	0,412044*	2309*	2574*	2839*	3104	3369	3634	3899	4163*	4428*	4693	30′	44	88	132
30′	4693	4957*	5222*	5487	5751*	6016	6280*	6545	6809*	7074	7338	20′	44	88	132
40′	7338	7602*	7867	8131	8395*	8659*	8923*	9188	9452	9716	9980	10′	44	88	132
50′	9980	0244	0508	0771*	1035*	1299*	1563	1827	2090*	2354*	0,422618	65°	44	88	132
25°	0,422618	2881*	3145	3409	3672*	3935*	4199	4462*	4726	4989*	5252*	50′	44	88	132
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Косинусы														

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
10′	5252*	5516	5779	6042	6305*	6568*	6831*	7094*	7357*	7620*	7883*	**40′**	44	88	132
20′	7883*	8146*	8409*	8672	8935	9197*	9460*	9723	9985*	0248*	**0,430**511	**30′**	44	88	131
30′	**0,430**511	0773*	1036	1298*	1561	1823	2085*	2348	2610	2872*	3134*	**20′**	44	87	131
40′	3134*	3396*	3659	3921	4183	4445	4707	4969	5231	5492*	5754*	**10′**	44	87	131
50′	5754*	6016*	6278	6540	6801*	7063	7325	7586*	7848	8109*	8371	**64°**	44	87	131
26°	8371	8632*	8893*	9155	9416*	9677*	9939	0200	0461*	0722*	**0,440**983*	**50′**	44	87	131
10′	**0,440**983*	1244*	1505*	1766*	2027*	2288*	2549*	2810	3071	3331*	3592*	**40′**	43	87	130
20′	3592*	3853	4114	4374*	4635	4895*	5156	5416*	5677	5937	6197*	**30′**	43	87	130
30′	6197*	6458	6718	6978*	7238*	7498*	7759	8019	8279	8539	8799	**20′**	43	87	130
40′	8799	9059	9319	9578*	9838*	0098	0358	0617*	0877*	1137	**0,451**396*	**10′**	43	87	130
50′	**0,451**396*	1656	1915*	2175	2434*	2694	2953	3212*	3472	3731	3990	**63°**	43	86	130
27°	3990	4249*	4508*	4767*	5026*	5285*	5544*	5803*	6062*	6321*	6580	**50′**	43	86	130
10′	6580	6839	7097*	7356*	7615	7873*	8132*	8391	8649*	8908	9166	**40′**	43	86	129
20′	9166	9424*	9683	9941*	0199*	0458	0716	0974	1232	1490*	**0,461**748*	**30′**	43	86	129
30′	**0,461**748*	2006*	2264*	2522*	2780	3038	3296	3553*	3811*	4069	4326	**20′**	43	86	129
40′	4326*	4584	4842	5099*	5357	5614*	5871*	6129	6386*	6643*	6901	**10′**	43	86	129
50′	6901	7158	7415*	7672*	7929*	8186*	8443*	8700*	8957*	9214*	9471*	**62°**	43	86	129
28°	9471*	9728	9985	0241*	0498*	0755	1011*	1268	1525	1781*	**0,472**037*	**50′**	43	86	128
10′	**0,472**037*	2294	2550*	2807	3063	3319*	3575*	3832	4088	4344	4600	**40′**	43	85	128
20′	4600	4856	5112	5368	5624	5880	6135*	6391*	6647	6903	7158*	**30′**	43	85	128
30′	7158*	7414	7669*	7925	8180*	8436	8691*	8947	9202*	9457*	9713	**20′**	43	85	128
40′	9713	9968	0223	0478*	0733*	0988*	1243*	1498*	1753*	2008*	**0,482**263	**10′**	43	85	128
50′	**0,482**263	2518	2772*	3027*	3282	3537	3791*	4046	4300*	4555	4809*	**61°**	42	85	127
29°	4809*	5064	5318	5572*	5826*	6081	6335	6589*	6843*	7097*	7351*	**50′**	42	85	127
10′	7351*	7605*	7859*	8113*	8367	8621	8875	9128*	9382	9636	9889*	**40′**	42	85	127
20′	9889*	0143	0396*	0650	0903*	1157	1410*	1663*	1917	2170	**0,492**423*	**30′**	42	84	127

30′	0,492423*	2676*	2929*	3182*	3435*	3688*	3941*	4194*	4447*	4700	4953	20′	42	84	126
40′	4953	5205*	5458*	5711	5963*	6216*	6469	6721*	6973*	7226	7478*	10′	42	84	126
50′	7478	7731	7983	8235*	8487*	8739*	8992	9244	9496	9748	0,500000	60°	42	84	126
30°	0,500000	0251*	0503*	0755*	1007	1259	1510*	1762	2013*	2265*	2517	50′	42	84	126
10′	2517	2768*	3019*	3271	3522*	3773*	4025	4276	4527*	4778*	5029*	40′	42	84	126
20′	5029*	5280*	5531*	5782*	6033*	6284*	6535	6786	7037	7287*	7538	30′	42	84	125
30′	7538	7788*	8039*	8290	8540*	8791	9041	9291*	9542	9792	0,510042*	20′	42	83	125
40′	0,510042*	0292*	0542*	0793	1043	1293	1543	1792*	2042*	2292*	2542*	10′	42	83	125
50′	2542*	2792	3041*	3291*	3541	3790*	4040	4289*	4539	4788*	5038	59°	42	83	125
31°	5038	5287	5536*	5785*	6035	6284	6533	6782	7031	7280	7529	50′	42	83	125
10′	7529	7778	8027	8275*	8524*	8773	9021*	9270*	9519	9767*	0,520016	40′	41	83	124
20′	0,520016	0264*	0512*	0761	1009*	1257*	1506	1754	2002	2250*	2498*	30′	41	83	124
30′	2498*	2746*	2994*	3242	3490	3738	3985*	4233*	4481	4728*	4976*	20′	41	83	124
40′	4976*	5224	5471*	5719	5966*	6213*	6461	6708*	6955*	7203	7450	10′	41	82	124
50′	7450	7697	7944	8191	8438	8685	8932	9179	9425*	9672*	9919	58°	41	82	123
32°	9919	0165*	0412*	0659	0905*	1152	1398*	1644*	1891	2137*	0,532383*	50′	41	82	123
10′	0,532383*	2630	2876	3122	3368	3614*	3860*	4106	4352	4598	4844	40′	41	82	123
20′	4844	5089*	5335	5581	5826*	6072	6317*	6563	6808*	7054	7299*	30′	41	82	123
30′	7299*	7544*	7790	8035	8280*	8525*	8770*	9015*	9260*	9505*	9750*	20′	41	82	123
40′	9750*	9995*	0240	0485	0729*	0974	1219	1463*	1708	1952*	0,542197	10′	41	82	122
50′	0,542197	2441*	2685*	2930	3174	3418*	3662*	3906*	4151	4395	4639	57°	41	81	122
33°	4639	4882*	5126*	5370*	5614*	5858	6101*	6345*	6589	6832*	7076	50′	41	81	122
10′	7076	7319*	7563	7806*	8049*	8293	8536	8779*	9022*	9265*	9508*	40′	41	81	122
20′	9508*	9751*	9994*	0237*	0480*	0723*	0966	1209	1451*	1694	0,551936*	30′	40′	81	121
30′	0,551936*	2179*	2422	2664	2906*	3149	3391*	3633*	3876	4118	4360	20′	40′	81	121
40′	4360	4602	4844	5086	5328	5570	5812	6053*	6295*	6537	6778*	10′	40′	81	121
50′	6778*	7020*	7262	7503*	7745	7986*	8227*	8469	8710	8951*	9192*	56°	40′	80	121
34°	9192	9434	9675	9916	0157	0398	0639	0879*	1120*	1361	0,561602	50′	40′	80	120
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Косинусы														

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
10′	**0,56**1602	1842*	2083	2323*	2564	2804*	3045	3285*	3526	3766	4006*	40′	40	80	120
20′	4006*	4246*	4486*	4726*	4967	5207	5446*	5686*	5926*	6166	6406	30′	40′	80	120
30′	6406	6645*	6885*	7125	7364*	7604	7843*	8083	8322*	8561*	8801	20′	40′	80	120
40′	8801	9040	9279*	9518*	9757*	9996*	0235*	0474*	0713*	0952	**0,57**1191	10′	40′	80	120
50′	**0,57**1191	1429*	1668*	1907	2145*	2384	2622*	2861	3099*	3338	3576	55°	40′	80	119
35°	3576	3814*	4052*	4291	4529	4767	5005	5243	5481	5719	5956*	50′	40′	79	119
10′	5956*	6194*	6432	6669*	6907*	7145	7382*	7620	7857*	8095	8332	40′	40	79	119
20′	8332	8569*	8806*	9044	9281	9518	9755	9992	0229	0466	**0,58**0702*	30′	40′	79	119
30′	**0,58**0702*	0939*	1176	1413	1649*	1886	2122*	2359	2595*	2832	3068*	20′	39	79	118
40′	3068*	3304*	3541	3777	4013*	4249*	4485*	4721*	4957*	5193*	5429	10′	39	79	118
50′	5429	5665	5901	6136*	6372	6607*	6843*	7079	7314	7549*	7785	54°	39	79	118
36°	7785	8020*	8255*	8491	8726	8961	9196	9431	9666	9901	**0,59**0136	50′	39	78	118
10′	**0,59**0136	0370*	0605*	0840	1075	1309*	1544	1778*	2013	2247*	2481*	40′	39	78	117
20′	2481*	2716	2950*	3184*	3418*	3653	3887	4121	4355	4588*	4822*	30′	39	78	117
30′	4822*	5056*	5290	5524	5757*	5991	6224*	6458	6691*	6925	7158*	20′	39	78	117
40′	7158*	7391*	7625	7858	8091	8324*	8557*	8790*	9023*	9256	9489	10′	39	78	117
50′	9489	9722	9954*	0187*	0420	0652*	0885	1117*	1350	1582*	**0,60**1815	53°	39	78	116
37°	**0,60**1815	2047	2279*	2511*	2743*	2975*	3207*	3439*	3671*	3903*	4135*	50′	39	77	116
10′	4135*	4367	4599	4830*	5062	5293*	5525*	5756*	5988	6219*	6451	40′	39	77	116
20′	6451	6682	6913*	7144*	7375*	7606*	7837*	8068*	8299*	8530*	8761	30′	39	77	116
30′	8761	8992	9222*	9453*	9684	9914*	0145	0375*	0606	0836	**0,61**1066*	20′	38	77	115
40′	**0,61**1066*	1296*	1527	1757	1987	2217	2447	2677	2907	3136*	3366*	10′	38	77	115
50′	3366*	3596	3826	4055*	4285	4514*	4744	4973*	5202*	5432	5661	52°	38	77	115
38°	5661	5890*	6119*	6348*	6577*	6806*	7035*	7264*	7493*	7722	7951	50′	38	76	114
10′	7951	8179*	8408	8636*	8865	9093*	9322	9550*	9779	0007	**0,62**0235	40′	38	76	114
20′	**0,62**0235	0463*	0691*	0919*	1147*	1375*	1603*	1831	2059	2286*	2514*	30′	38	76	114

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
30′	2514*	2742	2969*	3197	3424*	3652	3879*	4106*	4334	4561	4788*	20′	38	76	114
40′	4788*	5015*	5242*	5469*	5696*	5923	6150	6377	6603*	6830	7057	10′	38	76	113
50′	7057	7283*	7510	7736*	7963	8189	8415*	8641*	8868	9094	9320	51°	38	75	113
39°	9320	9546	9772	9998	0224	0450	0675*	0901*	1127	1352*	**0,63**1578	50′	38	75	113
10′	**0,63**1578	1803*	2029	2254*	2480	2705	2930*	3155*	3380*	3605*	3830*	40′	38	75	113
20′	3830*	4055*	4280*	4505*	4730*	4955	5179*	5404*	5629	5853*	6078	30′	37	75	112
30′	6078	6302*	6527	6751	6975*	7199*	7423*	7648	7872	8096	8320	20′	37	75	112
40′	8320	8543*	8767*	8991*	9215	9439	9662*	9886	0109*	0333	**0,64**0556*	10′	37	75	112
50′	**0,64**0556*	0779*	1003	1226	1449*	1672*	1895*	2118*	2341*	2564*	2787*	50°	37	74	112
40°	2787*	3010	3233	3455*	3678*	3901	4123*	4346	4568*	4790*	5013	50′	37	74	111
10′	5013	5235	5457*	5679*	5901*	6123*	6345*	6567*	6789*	7011*	7233	40′	37	74	111
20′	7233	7455	7676*	7898	8119*	8341	8562*	8784	9005*	9226*	9448	30′	37	74	111
30′	9448	9669	9890	0111	0332	0553	0774	0995	1215*	1436*	**0,65**1657	20′	37	74	110
40′	**0,65**1657	1877*	2098	2318*	2539	2759*	2980	3200	3420*	3640*	3860*	10′	37	73	110
50′	3860*	4080*	4300*	4520*	4740*	4960*	5180	5400	5619*	5839	6059	49°	37	73	110
41°	6059	6278*	6498	6717	6936*	7156	7375	7594	7813*	8032*	8251*	50′	37	73	110
10′	8251*	8470*	8689	8908	9127	9345*	9564	9783	0001*	0220	**0,66**0438*	40′	36	73	109
20′	**0,66**0438*	0657	0875	1093*	1311*	1530	1748	1966	2184	2402	2620	30′	36	73	109
30′	2620	2837*	3055*	3273	3491	3708*	3926	4143*	4361	4578*	4795*	20′	36	73	109
40′	4795	5013	5230	5447*	5664*	5881*	6098*	6315*	6532	6749	6966	10′	36	72	109
50′	6966	7182*	7399	7616	7832*	8049	8265	8481*	8698	8914	9130*	48°	36	72	108
42°	9130*	9346*	9562*	9778*	9994*	0210*	0426*	0642	0858	1073*	**0,67**1289	50′	36	72	108
10′	**0,67**1289	1505	1720*	1936	2151	2366*	2582	2797	3012*	3227*	3442*	40′	36	72	108
20′	3442*	3657*	3872*	4087*	4302	4517	4731*	4946*	5161	5375*	5590	30′	36	72	107
30′	5590	5804*	6019	6233	6447*	6661*	6875*	7090	7304	7518	7732	20′	36	71	107
40′	7732	7945*	8159*	8373	8587	8800*	9014	9227*	9441	9654*	9868	10′	36	71	107
50′	9868	0081	0294*	0507*	0720*	0933*	1146*	1359*	1572*	1785*	**0,68**1998	47°	36	71	107
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Косинусы														

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки	
	0′	**1′**	**2′**	**3′**	**4′**	**5′**	**6′**	**7′**	**8′**	**9′**	**10′**		10″	20″	30″
43°	**0,68**1998	2211	2423*	2636	2848*	3061	3273*	3486	3698	3910*	4122*	**50′**	35	71	106
10′	4122*	4335	4547	4759	4971	5183	5394*	5606*	5818	6030	6241*	**40′**	35	71	106
20′	6241*	6453	6664*	6876	7087*	7298*	7510	7721	7932	8143*	8354*	**30′**	35	70	106
30′	8354*	8565*	8776	8987	9198	9408*	9619*	9830	0040*	0251	**0,69**0461*	**20′**	35	70	105
40′	**0,69**0461*	0672	0882	1092*	1302*	1513	1723	1933	2143	2353	2562*	**10′**	35	70	105
50′	2562*	2772*	2982*	3192	3401*	3611	3820*	4030	4239*	4449	4658	**46°**	35	70	105
44°	4658	4867*	5076*	5285*	5494*	5703*	5912*	6121*	6330	6539	6747*	**50′**	35	70	104
10′	6747*	6956*	7165	7373*	7582	7790	7998*	8207	8415	8623	8831*	**40′**	35	69	104
20′	8831*	9039*	9247*	9455	9663	9871	0078*	0286*	0494	0701*	**0,70**0909	**30′**	35	69	104
30′	**0,70**0909	1116*	1324	1531	1738*	1945*	2153	2360	2567	2774	2981	**20′**	35	69	104
40′	2981	3187*	3394*	3601	3808	4014*	4221	4427*	4634	4840*	5046*	**10′**	34	69	103
50′	5046*	5253	5459	5665	5871*	6077*	6283*	6489	6695	6901	7106*	**45°**	34	69	103
45°	7106*	7312	7518	7723*	7929	8134	8339*	8545	8750	8955*	9160*	**50′**	34	68	103
10′	9160*	9365*	9570*	9775*	9980*	0185	0390	0594*	0799	1004	**0,71**1208*	**40′**	34	68	102
20′	**0,71**1208*	1413	1617	1821*	2026	2230	2434	2638*	2842*	3046*	3250	**30′**	34	68	102
30′	3250	3454	3658	3861*	4065*	4269	4472*	4676	4879*	5082*	5286	**20′**	34	68	102
40′	5286	5489*	5692*	5895*	6098*	6301*	6504*	6707*	6910*	7113	7316	**10′**	34	68	102
50′	7316	7518*	7721	7923*	8126	8328*	8531	8733	8935*	9137*	9339*	**44°**	34	67	101
46°	9339*	9541*	9743*	9945*	0147*	0349	0551	0752*	0954	1155*	**0,72**1357	**50′**	34	67	101
10′	**0,72**1357	1558*	1760	1961*	2162*	2363*	2565	2766	2967	3168	3368*	**40′**	34	67	101
20′	3368*	3569*	3770*	3971	4171*	4372	4572*	4773	4973*	5174	5374	**30′**	33	67	100
30′	5374	5574*	5774*	5974*	6174*	6374*	6574*	6774*	6974	7174	7373*	**20′**	33	67	100
40′	7373*	7573	7772*	7972	8171*	8370*	8570	8769	8968*	9167*	9366*	**10′**	33	66	100
50′	9366*	9565*	9764*	9963	0162	0361	0559*	0758	0956*	1155	**0,73**1353*	**43°**	33	66	99
47°	**0,73**1353*	1552	1750	1948*	2146*	2344*	2542*	2740*	2938*	3136*	3334	**50′**	33	66	99
10′	3334	3532	3729*	3927	4125	4322*	4519*	4717	4914*	5111*	5309	**40′**	33	66	99
20′	5309	5506	5703	5900	6097	6293*	6490*	6687	6884	7080*	7277	**30′**	33	66	98

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
30′	7277	7473*	7670	7866*	8062*	8259	8455	8651	8847*	9043	9239	20′	33	65	98
40′	9239	9435	9631	9826*	0022*	0218	0413*	0609	0804*	0999*	**0,74**1195	10′	33	65	98
50′	**0,74**1195	1390*	1585*	1780*	1975*	2170*	2365*	2560*	2755	2950	3144*	**42°**	32	65	97
48°	3144*	3339	3533*	3728	3922*	4117	4311*	4505*	4699*	4894	5088	50′	32	65	97
10′	5088	5282	5476	5669*	5863*	6057	6251	6444*	6638	6831*	7025	40′	32	65	97
20′	7025	7218	7411*	7604*	7798	7991	8184	8377	8570	8762*	8955*	30′	32	64	97
30′	8955*	9148	9341	9533*	9726	9918*	0111	0303	0495*	0687*	**0,75**0880	20′	32	64	96
40′	**0,75**0880	1072	1264	1456	1647*	1839*	2031*	2223	2414*	2606	2798	10′	32	64	96
50′	2798	2989	3180*	3372	3563	3754*	3945*	4136*	4327*	4518*	4709*	**41°**	32	64	96
49°	4709*	4900	5091	5281*	5472	5662*	5853	6043*	6234	6424*	6614*	50′	32	64	95
10′	6614*	6804*	6995	7185	7375	7564*	7754*	7944*	8134	8324	8513*	40′	32	63	95
20′	8513*	8703	8892*	9081*	9271	9460*	9649*	9838*	0028	0217	**0,76**0405*	30′	32	63	95
30′	**0,76**0405*	0594*	0783*	0972	1161	1349*	1538	1726*	1915	2103*	2291*	20′	31	63	94
40′	2291*	2480	2668	2856	3044	3232	3420	3608	3796	3983*	4171	10′	31	63	94
50′	4171	4359	4546*	4734	4921	5108*	5296	5483	5670	5857	6044	**40°**	31	62	94
50°	6044	6231	6418	6605	6791*	6978*	7165	7351*	7538	7724*	7911	50′	31	62	93
10′	7911	8097	8283*	8469*	8655*	8841*	9027*	9213*	9399*	9585	9771	40′	31	62	93
20′	9771	9956*	0142	0327*	0513	0698*	0883*	1069	1254	1439*	**0,77**1624*	30′	31	62	93
30′	**0,77**1624*	1809*	1994*	2179	2364	2548*	2733*	2918	3102*	3287	3471*	20′	31	62	92
40′	3471*	3655*	3840	4024	4208*	4392*	4576*	4760*	4944	5128	5312	10′	31	61	92
50′	5312	5495*	5679	5862*	6046	6229*	6413	6596	6779*	6962*	7145*	**39°**	31	61	92
51°	7145*	7329	7511*	7694*	7877*	8060	8243	8425*	8608	8790*	8973	50′	30′	61	91
10′	8973	9155*	9337*	9520	9702	9884	0066*	0248	0430	0612	**0,78**0794	40′	30′	61	91
20′	**0,78**0794	975*	1157	1338*	1520	1701*	1883	2064*	2245*	2427	2608	30′	30	60	91
30′	2608	2789	2970	3151	3331*	3512*	3693	3874	4054*	4235	4415*	20′	30′	60	90
40′	4415*	4596	4776	4956*	5136*	5316*	5496*	5676*	5856*	6036*	6216*	10′	30′	60	90
50′	6216*	6396	6575*	6755*	6935	7114	7293*	7473	7652	7831*	8010*	**38°**	30′	60	90
52°	8010*	8189*	8368*	8547*	8726*	8905	9084	9262*	9441	9619*	9798	50′	30′	60	89
10′	9798	9976*	0155	0333	0511	0689*	0867*	1045*	1223*	1401	**0,79**1579	40′	30′	59	89
20′	**0,79**1579	1756*	1934*	2112	2289*	2467	2644	2821*	2999	3176	3353	30′	30	59	89
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Косинусы														

	Синусы												Поправки		
	0′	**1′**	**2′**	**3′**	**4′**	**5′**	**6′**	**7′**	**8′**	**9′**	**10′**		10″	20″	30″
30′	3353	3530	3707	3884	4061	4237*	4414*	4591	4767*	4944	5120*	**20′**	29	59	88
40′	5120*	5297	5473	5649*	5825*	6002	6178	6354	6529*	6705*	6881*	**10′**	29	59	88
50′	6881*	7057	7232*	7408	7583*	7759	7934*	8110	8285	8460	8635*	**37°**	29	58	88
53°	8635*	8810*	8985	9160	9335	9509*	9684*	9859	0033*	0208	**0,80**0382*	**50′**	29	58	87
10′	**0,80**0382*	0557	0731	0905*	1079*	1253*	1427*	1601*	1775*	1949	2123	**40′**	29	58	87
20′	2123	2296*	2470	2644	2817	2990*	3164	3337	3510*	3683*	3856*	**30′**	29	58	87
30′	3856*	4029*	4202*	4375*	4548	4721	4893*	5066	5238*	5411	5583*	**20′**	29	58	86
40′	5583*	5756	5928	6100	6272*	6444*	6616*	6788	6960	7132	7303*	**10′**	29	57	86
50′	7303*	7475	7646*	7818	7989*	8161	8332*	8503*	8674*	8845*	9017	**36°**	29	57	86
54°	9017	9187*	9358*	9529*	9700	9871	0041*	0212	0382*	0553	**0,81**0723	**50′**	28	57	85
10′	**0,81**0723	893*	1063*	1233*	1404	1573*	1743*	1913*	2083*	2253	2422*	**40′**	28	57	85
20′	2422*	2592	2761*	2931	3100*	3270	3439	3608	3777*	3946*	4115*	**30′**	28	56	85
30′	4115*	4284	4453	4621*	4790*	4959	5127*	5296	5464*	5633	5801	**20′**	28	56	84
40′	5801	5969	6137*	6305*	6473*	6641*	6809	6977	7144*	7312*	7480	**10′**	28	56	84
50′	7480	7647*	7815	7982	8149*	8316*	8484	8651	8818	8985	9152	**35°**	28	56	84
55°	9152	9318*	9485*	9652	9818*	9985	0151*	0318	0484*	0650*	**0,82**0817	**50′**	28	56	83
10′	**0,82**0817	0983	1149	1315	1481	1646*	1812*	1978	2144	2309*	2475	**40′**	28	55	83
20′	2475	2640*	2805*	2971	3136	3301*	3466*	3631*	3796*	3961	4126	**30′**	28	55	83
30′	4126	4290*	4455*	4620	4784*	4949	5113	5277*	5442	5606	5770	**20′**	27	55	82
40′	5770	5934	6098	6262	6426	6589*	6753	6917	7080*	7244	7407	**10′**	27	55	82
50′	7407	7570*	7734	7897	8060	8223	8386	8549	8712	8874*	9037*	**34°**	27	54	82
56°	9037*	9200	9362*	9525	9687*	9850	0012	0174	0336*	0498*	**0,83**0660*	**50′**	27	54	81
10′	**0,83**0660*	0822*	0984	1146	1307*	1469*	1631	1792*	1954	2115	2276*	**40′**	27	54	81
20′	2276*	2438	2599	2760	2921	3082	3243	3403*	3564*	3725	3885*	**30′**	27	54	80
30′	3885*	4046	4206*	4367	4527	4687*	4847*	5007*	5167*	5327*	5487*	**20′**	27	53	80
40′	5487*	5647*	5807	5967	6126*	6286	6445*	6605	6764	6923*	7082*	**10′**	27	53	80
50′	7082*	7241*	7400*	7559*	7718*	7877*	8036	8194*	8353*	8512	8670*	**33°**	26	53	79

57°	8670*	8828*	8987	9145*	9303*	9461*	9619*	9777*	9935*	0093*	**0,84**0251	**50′**	26	53	79
10′	**0,84**0251	0409	0566*	0724	0881*	1039	1196	1353*	1510*	1667*	1824*	**40′**	26	52	79
20′	1824*	1981*	2138*	2295*	2452	2609	2765*	2922	3078*	3235	3391	**30′**	26	52	78
30′	3391	3547*	3703*	3860	4016	4172	4327*	4483*	4639*	4795	4950*	**20′**	26	52	78
40′	4950*	5106	5261*	5417	5572*	5727*	5883	6038	6193	6348	6503	**10′**	26	52	78
50′	6503	6657*	6812*	6967	7121*	7276	7430*	7585	7739*	7893*	8048	**32°**	26	52	77
58°	8048	8202	8356	8510	8664	8817*	8971*	9125	9278*	9432*	9585*	**50′**	26	51	77
10′	9585*	9739	9892*	0045*	0199	0352	0505	0658	0811	0963*	**0,85**1116*	**40′**	26	51	77
20′	**0,85**1116*	1269	1421*	1574	1726*	1879	2031*	2183*	2336	2488	2640	**30′**	25	51	76
30′	2640	2792	2944	3095*	3247*	3399	3550*	3702	3853*	4005	4156	**20′**	25	51	76
40′	4156	4307*	4458*	4609*	4760*	4911*	5062*	5213*	5364	5514*	5665	**10′**	25	50′	75
50′	5665	5816	5966	6116*	6267	6417	6567	6717*	6867*	7017	7167	**31°**	25	50′	75
59°	7167	7317	7466*	7616	7766	7915	8064*	8214	8363*	8512*	8661*	**50′**	25	50′	75
10′	8661*	8810*	8959*	9108*	9257*	9406	9555	9703*	9852	0000*	**0,86**0149	**40′**	25	50′	74
20′	**0,86**0149	0297	0445*	0593*	0742	0890	1038	1185*	1333*	1481	1629	**30′**	25	49	74
30′	1629	1776*	1924	2071*	2219	2366	2513*	2660*	2807*	2954*	3101*	**20′**	25	49	74
40′	3101*	3248*	3395*	3542	3688*	3835*	3982	4128	4274*	4421	4567	**10′**	24	49	73
50′	4567	4713	4859*	5005*	5151	5297	5443	5588*	5734	5879*	6025	**30°**	24	49	73
60°	6025	6170*	6316	6461	6606*	6751*	6896*	7041*	7186*	7331	7476	**50′**	24	48	73
10′	7476	7620*	7765	7909*	8054	8198*	8343	8487	8631*	8775*	8919*	**40′**	24	48	72
20′	8919*	9063*	9207	9351	9494*	9638*	9782	9925*	0069	0212	**0,87**0355*	**30′**	24	48	72
30′	**0,87**0355*	0498*	0642	0785	0928	1070*	1213*	1356*	1499	1641*	1784	**20′**	24	48	71
40′	1784	1926*	2069	2211*	2353*	2496	2638	2780	2922	3063*	3205*	**10′**	24	47	71
50′	3205*	3347	3489	3630*	3772	3913*	4055	4196	4337*	4478*	4619*	**29°**	24	47	71
61°	4619*	4760*	4901*	5042	5183	5323*	5464*	5605	5745*	5885*	6026	**50′**	23	47	70
10′	6026	6166*	6306*	6446*	6586*	6726*	6866*	7006	7146	7285*	7425	**40′**	23	47	70
20′	7425	7564*	7704	7843*	7982*	8122	8261	8400	8539	8678	8817	**30′**	23	46	70
30′	8817	8955*	9094*	9233	9371*	9510	9648*	9786*	9925	0063	**0,88**0201	**20′**	23	46	69
40′	**0,88**0201	0339	0477	0615	0753	0890*	1028	1165*	1303	1440*	1578	**10′**	23	46	69
50′	1578	1715	1852*	1989*	2126*	2263*	2400*	2537*	2674	2811	2947*	**28°**	23	46	68
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Косинусы														

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
62°	2947*	3084	3220*	3356*	3493	3629	3765*	3901*	4037*	4173*	4309	**50′**	23	45	68
10′	4309	4445	4580*	4716*	4852	4987*	5123	5258	5393*	5528*	5663*	**40′**	23	45	68
20′	5663*	5798*	5933*	6068*	6203*	6338	6472*	6607*	6742	6876	7010*	**30′**	22	45	67
30′	7010*	7145	7279	7413	7547*	7681	7815	7949	8082*	8216*	8350	**20′**	22	45	67
40′	8350	8483*	8617	8750*	8883*	9017	9150	9283	9416	9549	9682	**10′**	22	44	67
50′	9682	9814*	9947*	0080	0212*	0345	0477*	0610	0742	0874	**0,891**006*	**27°**	22	44	66
63°	**0,891**006*	1138*	1270	1402	1534	1665*	1797*	1929	2060*	2192	2323	**50′**	22	44	66
10′	2323	2454*	2585*	2716*	2847*	2978*	3109*	3240*	3371	3502	3632*	**40′**	22	44	65
20′	3632*	3763	3893*	4023*	4154	4284	4414*	4544*	4674*	4804*	4934	**30′**	22	43	65
30′	4934	5064	5193*	5323	5452*	5582	5711*	5841	5970	6099	6228*	**20′**	22	43	65
40′	6228*	6357*	6486	6615	6744	6872*	7001	7129*	7258	7386*	7515	**10′**	21	43	64
50′	7515	7643	7771	7899*	8027*	8155*	8283	8411	8538*	8666	8794	**26°**	21	43	64
64°	8794	8921*	9048*	9176	9303*	9430*	9557*	9684*	9811*	9938*	**0,900**065	**50′**	21	42	64
10′	**0,900**065	0192	0318*	0445	0571*	0698	0824*	0950*	1077	1203	1329	**40′**	21	42	63
20′	1329	1455	1581	1706*	1832*	1958	2083*	2209	2334*	2460	2585	**30′**	21	42	63
30′	2585	2710	2835*	2960*	3085*	3210	3335	3460	3584*	3709	3833*	**20′**	21	42	62
40′	3833*	3958	4082*	4206*	4331	4455	4579	4703	4827	4950*	5074*	**10′**	21	41	62
50′	5074*	5198	5321*	5445	5568*	5692	5815	5938*	6061*	6184*	6307*	**25°**	21	41	62
65°	6307*	6430*	6553*	6676	6798*	6921*	7044	7166	7288*	7411	7533	**50′**	20′	41	61
10′	7533	7655	7777	7899	8021	8143	8264*	8386*	8508	8629*	8751	**40′**	20′	41	61
20′	8751	8872	8993*	9114*	9236	9357	9478	9599	9719*	9840*	9961	**30′**	20′	40′	61
30′	9961	0081*	0202	0322*	0443	0563	0683*	0803*	0923*	1043*	**0,911**163*	**20′**	20	40′	60
40′	**0,911**163*	1283*	1403	1522*	1642*	1762	1881	2000*	2120	2239	2358	**10′**	20′	40′	60
50′	2358	2477	2596	2715	2834	2952*	3071*	3190	3308*	3427	3545	**24°**	20′	40′	59
66°	3545	3663*	3781*	3900	4018	4136	4253*	4371*	4489*	4607	4724*	**50′**	20′	39	59
10′	4724*	4842	4959*	5077	5194	5311	5428*	5545*	5662*	5779	5896	**40′**	20′	39	59
20′	5896	6013	6129*	6246	6362*	6479	6595	6711*	6827*	6944	7060	**30′**	19	39	58

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
30′	7060	7176	7291*	7407*	7523	7639	7754*	7870	7985*	8100*	8216	20′	19	39	58
40′	8216	8331	8446	8561	8676	8791	8906	9020*	9135	9249*	9364	10′	19	38	57
50′	9364	9478*	9593	9707	9821	9935*	0049*	0163*	0277	0391	0,920504*	23°	19	38	57
67°	0,920504*	0618	0732	0845	0958*	1072	1185	1298*	1411*	1524*	1637*	50′	19	38	57
10′	1637*	1750	1863	1975*	2088	2200*	2313	2425*	2538	2650	2762	40′	19	38	56
20′	2762	2874*	2986	3098	3210	3321*	3433*	3545	3656*	3768	3879*	30′	19	37	56
30′	3879*	3990*	4102	4213	4324	4435	4546	4656*	4767*	4878	4988*	20′	18	37	55
40′	4988*	5099	5209*	5320	5430	5540*	5650*	5760*	5870*	5980	6090	10′	18	37	55
50′	6090	6199*	6309*	6419	6528*	6638	6747	6856*	6965*	7074*	7183*	22°	18	36	55
68°	7183*	7292*	7401*	7510	7619	7727*	7836	7944*	8053	8161	8269*	50′	18	36	54
10′	8269*	8377*	8485*	8593*	8701*	8809*	8917	9024*	9132*	9240	9347*	40′	18	36	54
20′	9347*	9454*	9562	9669	9776	9883*	9990	0097	0204	0310*	0,930417*	30′	18	36	54
30′	0,930417*	0524	0630*	0737	0843	0949*	1055*	1161*	1267*	1373*	1479*	20′	18	35	53
40′	1479*	1585*	1691	1796*	1902	2007*	2113	2218*	2323*	2428*	2534	10′	18	35	53
50′	2534	2639	2743*	2848*	2953*	3058	3162*	3267	3371*	3476	3580	21°	17	35	52
69°	3580	3684*	3788*	3892*	3996*	4100*	4204	4308	4411*	4515	4618*	50′	17	35	52
10′	4618*	4722	4825*	4928*	5032	5135	5238	5341	5444	5546*	5649*	40′	17	34	52
20′	5649*	5752	5854*	5957	6059*	6161*	6264	6366	6468	6570	6672	30′	17	34	51
30′	6672	6774	6875*	6977	7079	7180*	7281*	7383	7484*	7585*	7686*	20′	17	34	51
40′	7686*	7787*	7888*	7989*	8090*	8191	8291*	8392*	8493	8593	8693*	10′	17	34	50
50′	8693*	8794	8894	8994	9094	9194	9294	9393*	9493	9593	9692*	20°	17	33	50
70°	9692*	9792	9891	9990*	0089*	0189	0288	0387	0486	0584*	0,940683*	50′	17	33	50
10′	0,940683*	0782	0880*	0979	1077*	1176	1274	1372	1470*	1568*	1666	40′	16	33	49
20′	1666	1764	1862	1959*	2057	2155	2252	2349*	2447	2544	2641	30′	16	33	49
30′	2641	2738*	2835*	2932	3029	3126	3222*	3319	3415*	3512	3608*	20′	16	32	48
40′	3608*	3704*	3800*	3897	3993	4089	4184*	4280*	4376	4472	4567*	10′	16	32	48
50′	4567*	4663	4758	4853*	4948*	5044	5139	5234	5329	5423*	5518*	19°	16	32	48
71°	5518*	5613	5707*	5802	5896*	5991	6085	6179*	6273*	6367*	6461*	50′	16	31	47
10′	6461*	6555	6649	6742*	6836*	6930	7023*	7116*	7210	7303*	7396*	40′	16	31	47
20′	7396*	7489*	7582*	7675*	7768	7861	7953*	8046	8138*	8231	8323*	30′	15	31	46
	Косинусы														

Продолжение табл. IX.4

	Синусы												Поправки	
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
30′	8323*	8415*	8508	8600	8692	8784	8876	8967*	9059	9151	9242*	20′	15	31	46
40′	9242*	9334	9425	9516*	9608	9699	9790	9881	9972	0062*	**0,95**0153*	10′	15	30′	46
50′	**0,95**0153*	0244	0334*	0425	0515*	0606	0696	0786	0876*	0966*	1056*	**18°**	15	30′	45
72°	1056*	1146	1236	1325*	1415	1504*	1594	1683*	1773	1862	1951	50′	15	30′	45
10′	1951	2040	2129	2218	2307	2395*	2484	2573	2661	2749*	2838	40′	15	30′	44
20′	2838	2926	3014*	3102*	3190*	3278*	3366	3454	3541*	3629	3716*	30′	15	29	44
30′	3716*	3804	3891*	3979	4066	4153	4240	4327	4414	4500*	4587*	20′	15	29	44
40′	4587	4674	4760*	4847	4933*	5019*	5106	5192	5278	5364	5450	10′	14	29	43
50′	5450	5536	5621*	5707	5793	5878*	5963*	6049	6134	6219*	6304*	**17°**	14	28	43
73°	6304*	6389*	6474*	6559*	6644	6728*	6813*	6898	6982*	7066*	7151	50′	14	28	42
10′	7151	7235	7319	7403*	7487	7571	7655	7738*	7822	7906	7989*	40′	14	28	42
20′	7989*	8072*	8156	8239	8322*	8405*	8488*	8571*	8654	8737	8819*	30′	14	28	42
30′	8819*	8902	8984*	9067	9149*	9231*	9313*	9396	9478	9560	9641*	20′	14	27	41
40′	9641*	9723*	9805	9886*	9968	0049*	0131	0212	0293*	0374*	**0,96**0455*	10′	14	27	41
50′	**0,96**0455*	0536*	0617*	0698	0779	0859*	0940	1020*	1101	1181	1261*	**16°**	13	27	40
74°	1261*	1341*	1421*	1501*	1581*	1661*	1741	1820*	1900*	1980	2059	50′	13	27	40
10′	2059	2138*	2218	2297	2376	2455	2534	2613	2691*	2770	2849	40′	13	26	39
20′	2849	2927*	3005*	3084	3162*	3240*	3318*	3396*	3474*	3552*	3630	30′	13	26	39
30′	3630	3708	3785*	3863	3940*	4018	4095	4172*	4249*	4326*	4403*	20′	13	26	39
40′	4403*	4480*	4557	4634	4710*	4787	4863*	4940	5016	5092*	5168*	10′	13	26	38
50′	5168*	5244*	5320*	5396*	5472*	5548	5624	5699*	5775	5850	5925*	**15°**	13	25	38
75°	5925*	6001	6076	6151	6226	6301	6376	6450*	6525*	6600	6674*	50′	12	25	37
10′	6674*	6749	6823	6897*	6971*	7045*	7119*	7193*	7267*	7341*	7415	40′	12	25	37
20′	7415	7488*	7562	7635*	7709	7782	7855*	7928*	8001*	8074*	8147*	30′	12	24	37
30′	8147*	8220	8293	8365*	8438	8510*	8583	8655	8727*	8799*	8871*	20′	12	24	36
40′	8871*	8943*	9015*	9087*	9159	9230*	9302	9373*	9445	9516*	9587*	10′	12	24	36
50′	9587*	9659	9730	9801	9872	9942	0013*	0084	0154	0225	**0,97**0295*	**14°**	12	24	35

													до 6 знаков!		
76°	0,9702957	3660*	4363	5064*	5765*	6465*	7164*	7863	8560*	9257*	9953	50′	12	23	35
10′	9953	0648*	1342*	2036	2728*	3420*	4111*	4801*	5491	6179*	0,9716867	40′	12	23	35
20′	0,9716867	7554	8240	8925*	9610	0293*	0976	1658	2339	3019*	0,9723699	30′	11	23	34
30′	0,9723699	4377*	5055*	5732*	6408*	7084	7758*	8432	9105	9777	0,9730448*	20′	11	23	34
40′	0,9730448*	1119	1788*	2457*	3125	3792*	4458*	5124	5789	6452*	7115*	10′	11	22	33
50′	7115*	7778	8439	9099*	9759*	0418*	1076*	1733*	2390	3045*	0,9743700*	13°	11	22	33
77°	0,9743700*	4354*	5007*	5660	6311	6962	7611*	8260*	8909	9556	0,9750202*	50′	11	22	33
10′	0,9750202*	0848*	1493*	2137*	2780*	3423	4064*	4705*	5345	5984*	6622*	40′	11	21	32
20′	6622*	7260	7896*	8532*	9167*	9801*	0435	1067*	1699	2330	0,9762960	30′	11	21	32
30′	0,9762960	3589	4217*	4845	5471*	6097*	6722*	7347	7970	8592*	9214*	20′	10′	21	31
40′	9214*	9835*	0455*	1075	1693	2311	2927*	3543*	4158*	4773	0,9775386*	10′	10	21	31
50′	0,9775386*	5999	6611	7222	7832	8441*	9050	9657*	0264*	0870*	0,9781476	12°	10′	20′	30
78°	0,9781476	2080	2683*	3286*	3888*	4489*	5089*	5689	6287*	6885*	7482*	50′	10′	20′	30
10′	7482*	8078*	8673*	9268	9861*	0454*	1046*	1637*	2228	2817*	0,9793406	40′	10′	20′	30
20′	0,9793406	3994	4581	5167	5752	6336*	6920*	7503*	8085*	8666*	9247	30′	10′	19	29
30′	9247	9826*	0405	0983	1560	2136	2711*	3286	3860	4432*	0,9805004*	20′	10′	19	29
40′	0,9805004*	5576	6146*	6716	7284*	7852*	8419*	8986	9551*	0116	0,9810679*	10′	9	19	28
50′	0,9810679*	1242*	1804*	2366	2926*	3486	4045	4602*	5160	5716	6271*	11°	9	19	28
79°	6271*	6826	7380	7933	8485	9036*	9587	0136*	0685*	1233*	0,9821780*	50′	9	18	28
10′	0,9821780*	2327	2872*	3417	3960*	4503*	5046	5587	6127*	6667*	7206	40′	9	18	27
20′	7206	7744	8281*	8817*	9353	9888	0422	0955	1487	2018*	0,9832549	30′	9	18	27
30′	0,9832549	3078*	3607*	4135*	4662*	5189	5714*	6239	6763	7286	7808	20′	9	18	26
40′	7808	8329*	8850	9370	9888*	0406*	0924	1440*	1956	2470*	0,9842984*	10′	9	17	26
50′	0,9842984*	3497*	4009*	4521	5031*	5541*	6050	6558	7065*	7571*	8077*	10°	8	17	25
80°	8077*	8582	9086	9589	0091	0592*	1093	1592*	2091*	2589*	0,9853087	50′	8	17	25
10′	0,9853087	3583	4078*	4573*	5067*	5560*	6052*	6544	7034*	7524	8013	40′	8	16	25
20′	8013	8501	8988	9474*	9960	0445	0928*	1411*	1894	2375	0,9862856	30′	8	16	24
30′	0,9862856	3335*	3814*	4292*	4769*	5246	5721*	6196	6670	7143	7615	20′	8	16	24
40′	7615	8086*	8557	9026*	9495*	9963*	0430*	0897	1362*	1827	0,9872291	10′	8	16	23
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Косинусы														

Окончание табл. IX.4

	Синусы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
50′	**0,987**2291	2754	3216	3677*	4138	4597*	5056*	5514	5971*	6427*	6883	9°	8	15	23
81°	6883	7338	7791*	8244*	8696*	9148	9598*	0048	0497	0944*	**0,988**1392	50′	8	15	23
10′	**0,988**1392	1838	2283*	2728	3172	3615	4057	4498	4938*	5378	5817	40′	7	15	22
20′	5817	6255	6692	7128	7563*	7998	8432	8864*	9297	9728	**0,989**0158*	30′	7	14	22
30′	**0,989**0158*	0588	1016*	1444*	1871*	2297*	2723	3147*	3571*	3994	4416	20′	7	14	21
40′	4416	4837*	5257*	5677	6096	6513*	6930*	7346*	7762	8176*	8590	10′	7	14	21
50′	8590	9003	9415	9826	0236*	0646	1054*	1462	1869	2275	**0,990**2680*	8°	7	14	20
82°	**0,990**2680*	3085	3488*	3891	4293	4694	5094*	5494	5892*	6290	6687	50′	7	13	20
10′	6687	7083	7478	7872*	8266	8658*	9050*	9441*	9831*	0221	**0,991**0609*	40′	7	13	20
20′	**0,991**0609*	997	1384	1770	2155	2539*	2923	3305*	3687*	4068*	4448*	30′	6	13	19
30′	4448*	4827*	5206	5583*	5960*	6336*	6711*	7085*	7459	7831*	8203*	20′	6	13	19
40′	8203*	8574	8944	9313*	9681*	0049	0416	0782	1147	1511	**0,992**1874	10′	6	12	18
50′	**0,992**1874	2236*	2598*	2959	3319	3678*	4036*	4394	4750*	5106*	5461*	7°	6	12	18
83°	5461*	5815*	6168*	6521	6872*	7223*	7573	7922	8270*	8618	8964*	50′	6	12	18
10′	8964*	9310	9655	9999	0342	0684*	1026	1366*	1706	2045	**0,993**2383*	40′	6	11	17
20′	**0,993**2383*	2720*	3057	3392*	3727*	4061*	4394*	4726*	5058	5388*	5718*	30′	6	11	17
30′	5718*	6047	6375	6702*	7029	7354*	7679	8003	8326	8648	8969	20′	5	11	16
40′	8969	9289*	9609*	9928	0246	0563	0879*	1195	1509*	1823	**0,994**2136	10′	5	11	16
50′	**0,994**2136	2448	2759*	3069*	3379	3688	3995*	4302*	4609	4914	5218*	6°	5	10′	15
84°	5218*	5522*	5825	6127	6428	6728*	7028	7326*	7624*	7921	8217	50′	5	10′	15
10′	8217	8512*	8807	9100*	9393	9685	9976	0266	0555*	0844	**0,995**1131*	40′	5	10′	15
20′	**0,995**1131*	1418*	1704*	1989*	2273*	2557	2840	3121*	3402*	3682*	3961*	30′	5	9	14
30′	3961*	4240	4517*	4794*	5070	5345	5619*	5892*	6165	6437	6707*	20′	5	9	14
40′	6707*	6977*	7246*	7515	7782*	8049	8315	8579*	8843*	9107	9369*	10′	4	9	13
50′	9369*	9631	9891*	0151*	0410*	0668*	0926	1182*	1438	1693	**0,996**1946*	5°	4	9	13
85°	**0,996**1946*	2200	2452	2703*	2954	3204	3452*	3701	3948	4194*	4440	50′	4	8	12
10′	4440	4684*	4928*	5171*	5413*	5655	5895	6135	6373*	6611*	6848*	40′	4	8	12

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
20′	6848*	7085	7320*	7555	7788*	8021*	8253*	8484*	8715	8944*	9173	30′	4	8	12
30′	9173	9401	9628	9854	0079*	0303*	0527*	0750	0972	1193	**0,997**1413	20′	4	7	11
40′	**0,997**1413	1632*	1851	2069	2285*	2501*	2717	2931	3144*	3357	3569	10′	4	7	11
50′	3569	3780	3990	4199	4407*	4615	4822	5027*	5232*	5437	5640*	4°	3	7	10
86°	5640*	5842*	6044*	6245	6445	6644*	6842*	7040	7236*	7432*	7627	50′	3	7	10
10′	7627	7821	8014*	8207	8398*	8589	8779	8968	9156	9343	9529*	40′	3	6	10
20′	9529*	9715*	9900	0084	0267	0449*	0630*	0811	0991	1169*	**0,998**1347*	30′	3	6	9
30′	**0,998**1347*	1525	1701	1876*	2051*	2225	2398	2570	2741*	2912	3081*	20′	3	6	9
40′	3081*	3250	3418	3585	3751	3916*	4081	4244*	4407*	4569*	4730*	10′	3	6	8
50′	4730*	4890*	5050	5208*	5366*	5523*	5679*	5834*	5989	6142*	6295	3°	3	5	8
87°	6295	6447	6598	6748	6897*	7045*	7193*	7340	7486	7631	7775	50′	2	5	7
10′	7775	7918*	8061	8203	8343*	8483*	8623	8761	8898*	9035	9171	40′	2	5	7
20′	9171	9306	9440	9573	9705*	9837	9967*	0097*	0226*	0354*	**0,999**0482	30′	2	4	7
30′	**0,999**0482	0608*	0734	0859	0982*	1106	1228	1349*	1470	1589*	1708*	20′	2	4	6
40′	1708*	1826*	1943*	2060	2175*	2290	2404	2517	2629	2740	2850*	10′	2	4	6
50′	2850*	2960	3069	3176*	3283*	3390	3495	3599*	3703*	3806	3908	2°	2	4	5
88°	3908	4009	4109*	4209	4307*	4405	4502	4598	4693	4787*	4881	50′	2	3	5
10′	4881	4973*	5065*	5156*	5246*	5335*	5424	5511*	5598*	5684	5769*	40′	1	3	4
20′	5769*	5853*	5937	6019*	6101	6181*	6261*	6341	6419	6496*	6573	30′	1	3	4
30′	6573	6648*	6723*	6797*	6871	6943	7014*	7085*	7155	7224	7292	20′	1	2	4
40′	7292	7359*	7426	7491*	7556	7620	7683	7745	7806*	7867	7926*	10′	1	2	3
50′	7926*	7985*	8043*	8100*	8157	8212*	8267	8320*	8373*	8425*	8476*	1°	1	2	3
89°	8476*	8527	8576*	8625	8673	8720	8766	8811*	8856	8899*	8942	50′	1	2	2
10′	8942	8984	9025	9065	9104*	9143	9180*	9217*	9253*	9288*	9323	40′	1	1	2
20′	9323	9356*	9389	9420*	9451*	9481*	9510*	9539	9566*	9593	9619	30′	1	1	2
30′	9619	9644	9668	9691*	9713*	9735*	9756	9776	9795	9813	9830*	20′	0	1	1
40′	9830*	9847	9862*	9877*	9891*	9904*	9917	9928	9939	9948*	9957*	10′	0	0	1
50′	9957*	9965*	9972*	9979	9984*	9989	9993	9996	9998	9999*	**0,000**0000	0°	0	0	0
90°	**0,000**0000												до 6 знаков!		

Косинусы

Таблица IX.4 содержит значения синусов и косинусов углов α, измеренных в градусной мере, таких, что $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, с шагом в $1'$ (одну минуту) и поправками для вычисления значений синусов и косинусов через каждые $10''$ (десять секунд).

Таблица IX.4 состоит из двух частей. В первой части приведены значения синусов углов от 0° до 82° с шестью верными знаками после запятой. Все табличные значения находятся в интервале [0,1]. Табличные значения, имеющие одинаковые первые две цифры после запятой, напечатаны поочередно на белом и сером фоне. Полностью все шесть знаков даны один раз в первом и один раз в последнем столбце табличных значений; две первые цифры после запятой выделены жирным шрифтом и они одинаковы для всех значений, напечатанных на одном с ними фоне.

Во второй части таблицы IX.4 приведены значения синусов для углов от 76° до 90°. Табличные значения даны не с шестью, а с семью верными значащими цифрами после запятой. При этом жирно напечатаны три первые из семи цифр. Табличные значения на этом отрезке так медленно меняются, что появилась возможность дать дополнительный седьмой верный знак.

Внимание! Обеспечить точность поправок во второй части таблицы IX.4 можно только до шестого знака. При пользовании поправками последнюю — четвертую — цифру табличных значений (она оказывается седьмой значащей цифрой) нужно отбросить.

Таблица IX.4 позволяет определить значения синусов и косинусов острых углов. Для удобства пользования таблицей дана двойная нумерация строк и столбцов: для синусов — *слева* и *сверху*, для косинусов — *справа* и *снизу*. Чтобы найти синусы и косинусы углов вне интервала от 0° до 90°, нужно воспользоваться формулами приведения тригонометрических функций к аргументу между 0° и 90° и периодичностью.

$$
\begin{array}{llll}
\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, & & \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\
\sin(90° \pm \alpha) = \cos\alpha, & & \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \\
 & & \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha, \\
\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, & & \cos(180° \pm \alpha) = -\cos\alpha, \\
\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha, & & \\
\sin(270° \pm \alpha) = -\cos\alpha, & & \cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha, \\
 & & \cos(270° + \alpha) = \sin\alpha, \\
\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha, & & \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha, \\
\sin(k \cdot 360° + \alpha) = \sin\alpha, & & \cos(k \cdot 360° + \alpha) = \cos\alpha, \\
\qquad k - \text{целое}, & & \qquad k \text{ — целое.}
\end{array}
$$

Пример 12. Найти sin $72°32'20''$.

На пересечении строки, *слева* обозначенной $72°30'$, и столбца, *над* которым сверху стоит 2, находим число 3891^*. В первом столбце на сером фоне жирно напечатаны первые цифры: **0,95**. Звездочка означает, что при округлении нужно в последнем разряде добавить 1. Получим $\sin 72°32' = 0{,}953892$. В столбце $20''$ находим поправку 29. Функция $\sin\alpha$ для значений аргумента из интервала $0° < \alpha < 90°$ возрастает. Поэтому

$$\sin 72°32'20'' = 0{,}953892 + 0{,}000029 = 0{,}953921.$$

Пример 13. Найти cos $72°32'20''$.

На пересечении строки, *справа* обозначенной $72°30'$, и столбца, *под* которым стоит $2'$, находим значение 0150*. Первые две цифры на этом же светлом фоне есть 0,30. Таким образом, $\cos 72°30' = 0{,}300151$ (мы учли звездочку). Поправка на $20''$ равна 93. Функция $\cos\alpha$ при $0° < \alpha < 90°$ убывает. Значение поправки нужно вычесть. Получим

$$\cos 72°32'20'' = 0{,}300151 - 0{,}000093 = 0{,}300058.$$

Замечание. В примерах 11 и 12 найдены синус и косинус одного и того же угла $72°32'20''$. Проверим точность соотношения $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Получим $0{,}953921^2 + 0{,}300058^2 = 1{,}0000001$. Точность — впечатляющая.

Пример 14. Найти sin $88°17'30''$.

На пересечении строки $88°10'$ и столбца $7'$ находим число 5511*, а с учетом первых трех цифр после запятой, равных **0,999**, получим 0,9995512. Последняя цифра относится только к $\sin 88°17'$. При обращении к поправкам ее нужно отбросить и взять значение $\sin 88°17'' = 0{,}999551$. Поправка, соответствующая $30''$, равна 04 и относится к пятому и шестому знакам. Поэтому $\sin 88°17'30'' = 0{,}999551 + 0{,}000004 = 0{,}999555$.

Пример 15. Найти cos $6°22'40''$.

Поправки на $40''$ в таблице нет. Воспользуемся поправкой на $20''$ и в качестве табличного значения возьмем не $6°22'$, а $6°23'$. Так как косинус в интервале $0° < \alpha < 90°$ — функция убывающая, а мы находим значение функции, соответствующее меньшему аргументу, пользуясь значением для большего аргумента, то значение поправки нужно будет прибавить: $\cos 6°22'40'' = \cos 6°23' +$ (поправка на $20''$).

Значение $\cos 6°23'$ найдем на пересечении строки с расположенным *справа* номером $6°20'$ и столбца, *внизу* которого стоит $3'$. Получим число 8003. На том же сером фоне находим жирно набранные первые три цифры после запятой **0,993**. Поэтому $\cos 6°23' = 0{,}9938003$. Поправка в столбце $20''$ равна 11, но она относится только к пятому и шестому знакам после запятой. Поэтому цифру 3 отбрасываем и получаем

$$\cos 6°22'40'' = \cos 6°23' + 0{,}000011 = 0{,}993800 + 0{,}000011 = 0{,}993811.$$

Таблица IX.5 (часть первая)

ТАНГЕНСЫ И КОТАНГЕНСЫ

	Тангенсы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
											0,000000	**90°**			
0°	0,000000	0290*	0581*	0872*	1163*	1454	1745	2036	2327	2617*	2908*	50′	48	97	145
10′	2908*	3199*	3490*	3781*	4072	4363	4654	4945	5236	5526*	5817*	40′	48	97	145
20′	5817*	6108*	6399*	6690*	6981	7272	7563	7854	8145	8435*	8726*	30′	48	97	145
30′	8726*	9017*	9308*	9599*	9890*	0181	0472	0763	1054	1345	0,011636	20′	48	97	145
40′	0,011636	1926*	2217*	2508*	2799*	3090*	3381*	3672*	3963*	4254	4545	10′	48	97	145
50′	4545	4836	5127	5418	5709	6000	6291	6582	6873	7164	7455	**89°**	48	97	145
1°	7455	7746	8037	8328	8618*	8909*	9200*	9491*	9782*	0073*	0,020364*	50′	48	97	145
10′	0,020364*	0655*	0947	1238	1529	1820	2111	2402	2693	2984	3275	40′	49	97	146
20′	3275	3566	3857	4148	4439	4730*	5021*	5312*	5603*	5894*	6185*	30′	49	97	146
30′	6185*	6477	6768	7059	7350	7641	7932*	8223*	8514*	8805*	9097	20′	49	97	146
40′	9097	9388	9679	9970	0261*	0552*	0843*	1135	1426	1717	0,032008*	10′	49	97	146
50′	0,032008*	2299*	2591	2882	3173	3464*	3755*	4047	4338	4629*	4920*	**88°**	49	97	146
2°	4920*	5212	5503	5794*	6085*	6377	6668	6959*	7250*	7542	7833*	50′	49	97	146
10′	7833*	8124*	8416	8707	8998*	9290	9581	9872*	0164	0455*	0,040746*	40′	49	97	146
20′	0,040746*	1038	1329*	1621	1912	2203*	2495	2786*	3078	3369*	3660*	30′	49	97	146
30′	3660*	3952	4243*	4535	4826*	5118	5409*	5701	5992*	6284	6575*	20′	49	97	146
40′	6575*	6867	7158*	7450	7741*	8033	8325	8616*	8908	9199*	9491	10′	49	97	146
50′	9491	9782*	0074*	0366	0657*	0949	1241	1532*	1824	2116	0,052407*	**87°**	49	97	146
3°	0,052407*	2699	2991	3282*	3574*	3866	4158	4449*	4741*	5033	5325	50′	49	97	146
10′	5325	5616*	5908*	6200	6492	6784	7075*	7367*	7659*	7951	8243	40′	49	97	146
20′	8243	8535	8827	9119	9410*	9702*	9994*	0286*	0578*	0870*	0,061162*	30′	49	97	146

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
30′	0,061162*	1454*	1746*	2038*	2330*	2622*	2914*	3206*	3498*	3790*	4082*	20′	49	97	146
40′	4082*	4375	4667	4959	5251	5543	5835*	6127*	6419*	6712	7004	10′	49	97	146
50′	7004	7296	7588*	7880*	8173	8465	8757*	9049*	9342	9634*	9926*	86°	49	97	146
4°	9926*	0219	0511	0803*	1096	1388*	1680*	1973	2265*	2558	0,072850*	50′	49	97	146
10′	0,072850*	3142*	3435	3727*	4020	4312*	4605	4897*	5190	5482*	5775	40′	49	97	146
20′	5775	6068	6360*	6653	6945*	7238	7531	7823*	8116	8409	8701*	30′	49	98	146
30′	8701*	8994	9287	9579*	9872*	0165	0458	0750*	1043*	1336	0,081629	20′	49	98	146
40′	0,081629	1922	2214*	2507*	2800*	3093*	3386	3679	3972	4265	4558	10′	49	98	146
50′	4558	4851	5144	5437	5730	6023	6316	6609	6902	7195*	7488*	85°	49	98	147
5°	7488*	7781*	8074*	8368	8661	8954	9247*	9540*	9834	0127	0,090420*	50′	49	98	147
10′	0,090420*	0713*	1007	1300	1593*	1887	2180	2473*	2767	3060*	3354	40′	49	98	147
20′	3354	3647	3940*	4234	4527*	4821	5114*	5408	5701*	5995	6289	30′	49	98	147
30′	6289	6582*	6876	7169*	7463*	7757	8050*	8344*	8638	8931*	9225*	20′	49	98	147
40′	9225*	9519	9813	0107	0400*	0694*	0988*	1282	1576	1870	0,102164	10′	49	98	147
50′	0,102164	2458	2751*	3045*	3339*	3633*	3927*	4222	4516	4810	5104	84°	49	98	147
6°	5104	5398	5692	5986*	6280*	6574*	6869	7163	7457*	7751*	8046	50′	49	98	147
10′	8046	8340	8634*	8929	9223	9517*	9812	0106*	0401	0695	0,110989*	40′	49	98	147
20′	0,110989*	1284	1578*	1873	2167*	2462*	2757	3051*	3346	3640*	3935*	30′	49	98	147
30′	3935*	4230	4524*	4819*	5114	5409	5703*	5998*	6293*	6588	6883	20′	49	98	147
40′	6883	7178	7473	7767*	8062*	8357*	8652*	8947*	9242*	9537*	9832*	10′	49	98	147
50′	9832*	0127*	0423	0718	1013	1308	1603*	1898*	2194	2489	0,122784*	83°	49	98	148
7°	0,122784*	3079*	3375	3670	3965*	4261	4556*	4851*	5147	5442*	5738	50′	49	98	148
10′	5738	6033*	6329	6624*	6920	7216	7511*	7807	8102*	8398*	8694	40′	49	99	148
20′	8694	8990	9285*	9581*	9877	0173	0468*	0764*	1060*	1356*	0,131652	30′	49	99	148
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
30′	0,131652	1948	2244	2540	2836	3132	3428	3724*	4020*	4316*	4612*	20′	49	99	148
40′	4612*	4909	5205	5501*	5797*	6094	6390	6686*	6982*	7279	7575*	10′	49	99	148
50′	7575*	7872	8168*	8464*	8761	9057*	9354	9651	9947*	0244	0,140540*	82°	49	99	148
8°	0,140540*	0837	1134	1430*	1727*	2024	2321	2617*	2914*	3211*	3508	50′	49	99	148
10′	3508	3805	4102	4399	4696	4993	5290	5587	5884	6181	6478	40′	49	99	148
20′	6478	6775*	7072*	7369*	7667	7964	8261*	8558*	8856	9153*	9451	30′	50	99	149
30′	9451	9748	0045*	0343	0640*	0938	1235*	1533	1830*	2128*	0,152426	20′	50	99	149
40′	0,152426	2723*	3021*	3319	3616*	3914*	4212*	4510	4808	5106	5403*	10′	50	99	149
50′	5403*	5701*	5999*	6297*	6595*	6893*	7191*	7490	7788	8086	8384	81°	50	99	149
9°	8384	8682*	8980*	9279	9577	9875*	0174	0472	0770*	1069	0,161367*	50′	50	99	149
10′	0,161367*	1666	1964*	2263	2561*	2860	3158*	3457*	3756	4054*	4353*	40′	50	100	149
20′	4353*	4652	4951	5250	5548*	5847*	6146*	6445*	6744*	7043*	7342*	30′	50	100	149
30′	7342*	7641*	7940*	8239*	8538*	8838	9137	9436*	9735*	0035	0,170334	20′	50	100	150
40′	0,170334	0633*	0933	1232*	1531*	1831	2130*	2430	2729*	3029*	3329	10′	50	100	150
50′	3329	3628*	3928*	4228	4527*	4827*	5127	5427	5727	6027	6326*	80°	50	100	150
10°	6326*	6626*	6926*	7226*	7526*	7827	8127	8427	8727	9027*	9327*	50′	50	100	150
10′	9327*	9628	9928	0228*	0529	0829	1129*	1430	1730*	2031	0,182331*	40′	50	100	150
20′	0,182331*	2632	2933	3233*	3534	3835	4135*	4436*	4737	5038	5339	30′	50	100	150
30′	5339	5639*	5940*	6241*	6542*	6843*	7144*	7446	7747	8048	8349	20′	50	100	151
40′	8349	8650*	8951*	9253	9554*	9855*	0157	0458*	0760	1061*	0,191363	10′	50	100	151
50′	0,191363	1664*	1966	2267*	2569*	2871	3173	3474*	3776*	4078	4380	79°	50	101	151
11°	4380	4682	4984	5286	5588	5890	6192	6494	6796	7098*	7400*	50′	50	101	151
10′	7400*	7703	8005	8307*	8609*	8912	9214*	9517	9819*	0122	0,200424*	40′	50	101	151

20′	0,200424*	0727	1030	1332*	1635	1938	2240*	2543*	2846*	3149	3452	30′	50	101	151
30′	3452	3755	4058	4361	4664	4967	5270*	5573*	5876*	6180	6483	20′	51	101	152
40′	6483	6786*	7090	7393	7696*	8000	8303*	8607	8910*	9214	9518	10′	51	101	152
50′	9518	9821*	0125*	0429	0733	1036*	1340*	1644*	1948*	2252*	0,212556*	78°	51	101	152
12°	0,212556*	2860*	3164*	3468*	3772*	4077	4381	4685*	4990	5294	5598*	50′	51	101	152
10′	5598*	5903	6207*	6512	6816*	7121	7425*	7730*	8035	8339*	8644*	40′	51	102	152
20′	8644*	8949*	9254	9559	9864	0169	0474	0779	1084	1389	0,221694*	30′	51	102	152
30′	0,221694*	1999*	2305	2610	2915*	3221	3526	3831*	4137	4442*	4748	20′	51	102	153
40′	4748	5054	5359*	5665	5971	6276*	6582*	6888*	7194	7500	7806	10′	51	102	153
50′	7806	8112	8418	8724	9030*	9336*	9642*	9949	0255	0561*	0,230868	77°	51	102	153
13°	0,230868	1174*	1481	1787*	2094	2400*	2707	3013*	3320*	3627	3934	50′	51	102	153
10′	3934	4241	4547*	4854*	5161*	5468*	5775*	6082*	6389*	6697	7004	40′	51	102	153
20′	7004	7311*	7618*	7926	8233*	8541	8848	9155*	9463*	9771	0,240078*	30′	51	102	154
30′	0,240078*	0386	0694	1001*	1309*	1617*	1925	2233	2541	2849	3157	20′	51	103	154
40′	3157	3465*	3773*	4081*	4390	4698	5006*	5315	5623*	5932	6240*	10′	51	103	154
50′	6240*	6549	6857*	7166	7474*	7783*	8092	8401	8710	9019	9328	76°	51	103	154
14°	9328	9636*	9946	0255	0564	0873	1182*	1491*	1801	2110*	0,252419*	50′	52	103	155
10′	0,252419*	2729	3038*	3348	3658	3967*	4277	4587	4896*	5206*	5516	40′	52	103	155
20′	5516	5826	6136	6446	6756	7066	7376*	7686*	7996*	8307	8617*	30′	52	103	155
30′	8617*	8927*	9238	9548*	9859	0169*	0480	0791	1101*	1412*	0,261723	20′	52	104	155
40′	0,261723	2034	2345	2656	2967	3278	3589	3900	4211	4522*	4833*	10′	52	104	156
50′	4833*	5145	5456*	5767*	6079	6390*	6702	7014	7325*	7637	7949	75°	52	104	156
15°	7949	8260*	8572*	8884*	9196*	9508*	9820*	0132*	0444*	0757	0,271069	50′	52	104	156
10′	0,271069	1381*	1693*	2006	2318*	2631	2943*	3256	3569	3881*	4194	40′	52	104	156
20′	4194	4507	4820	5132*	5445*	5758*	6071*	6384*	6698	7011	7324*	30′	52	104	156
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
30′	7324*	7637*	7951	8264*	8577*	8891	9205	9518*	9832	0145*	0,280459*	20′	52	104	157
40′	0,280459*	0773	1087	1401	1715	2029	2343	2657	2971	3285*	3599*	10′	52	105	157
50′	3599*	3914	4228*	4543	4857	5172	5486*	5801	6115*	6430*	6745	74°	52	105	157
16°	6745	7060	7375	7690	8005	8320	8635	8950	9265*	9580*	9896	50′	53	105	158
10′	9896	0211	0526*	0842	1157*	1473	1789	2104*	2420	2736	0,293052	40′	53	105	158
20′	0,293052	3367*	3683*	3999*	4316	4632	4948	5264*	5580*	5897	6213	30′	53	105	158
30′	6213	6529*	6846	7162*	7479*	7796	8112*	8429*	8746*	9063	9380	20′	53	106	158
40′	9380	9697	0014	0331	0648*	0965*	1283	1600	1917*	2235	0,302552*	10′	53	106	159
50′	0,302552*	2870	3187*	3505*	3823	4140*	4458*	4776*	5094*	5412*	5730*	73°	53	106	159
17°	5730*	6048*	6366*	6685	7003	7321*	7640	7958*	8277	8595*	8914	50′	53	106	159
10′	8914	9232*	9551*	9870	0189	0508	0827	1146	1465	1784	0,312103*	40′	53	106	159
20′	0,312103*	2422*	2742	3061*	3381	3700	4020	4339*	4659	4979	5298*	30′	53	106	160
30′	5298*	5618*	5938*	6258	6578	6898*	7218*	7538*	7859	8179	8499*	20′	53	107	160
40′	8499*	8820	9140*	9461	9781*	0102*	0423	0744	1064*	1385*	0,321706*	10′	53	107	160
50′	0,321706*	2027*	2348*	2669*	2991	3312	3633*	3955	4276*	4598	4919*	72°	54	107	161
18°	4919*	5241	5563	5884*	6206*	6528	6850	7172	7494	7816*	8138*	50′	54	107	161
10′	8138*	8460*	8783	9105*	9428	9750*	0073	0395*	0718	1041	0,331363*	40′	54	107	161
20′	0,331363*	1686*	2009*	2332*	2655*	2978*	3302	3625	3948*	4271*	4595	30′	54	108	162
30′	4595	4918*	5242	5565*	5889*	6213	6537	6861	7184*	7508*	7833	20′	54	108	162
40′	7833	8157	8481	8805*	9129*	9454	9778*	0103	0427*	0752	0,341077	10′	54	108	162
50′	0,341077	1401*	1726*	2051*	2376*	2701*	3026*	3351*	3676*	4002	4327*	71°	54	108	163
19°	4327*	4653	4978	5304	5629*	5955	6281	6606*	6932*	7258*	7584*	50′	54	109	163
10′	7584*	7910*	8236*	8563	8889	9215*	9542	9868	0195	0521*	0,350848	40′	54	109	163

20′	0,350848	1175	1501*	1828*	2155*	2482*	2809*	3136*	3463*	3791	4118*	30′	54	109	163
30′	4118*	4445*	4773	5100*	5428*	5756	6083*	6411*	6739*	7067*	7395*	20′	55	109	164
40′	7395*	7723*	8051*	8380	8708	9036*	9365	9693*	0022	0350*	0,360679	10′	55	109	164
50′	0,360679	1008	1337	1665*	1994*	2323*	2653	2982	3311*	3640*	3970	70°	55	110	165
20°	3970	4299*	4629	4958*	5288	5618	5948	6277*	6607*	6937*	7267*	50′	55	110	165
10′	7267*	7598	7928	8258*	8589	8919	9249*	9580*	9911	0241*	0,370572*	40′	55	110	165
20′	0,370572*	0903*	1234*	1565*	1896*	2227*	2559	2890	3221*	3553	3884*	30′	55	110	166
30′	3884*	4216	4547*	4879*	5211	5543	5875	6207	6539	6871*	7203*	20′	55	111	166
40′	7203*	7536	7868*	8200*	8533*	8866	9198*	9531*	9864	0197	0,380530	10′	55	111	166
50′	0,380530	0863	1196	1529*	1862*	2196	2529*	2863	3196*	3530	3864	69°	56	111	167
21°	3864	4197*	4531*	4865*	5199*	5533*	5867*	6202	6536	6870*	7205	50′	56	111	167
10′	7205	7539*	7874	8209	8543*	8878*	9213*	9548*	9883*	0218*	0,390554	40′	56	112	167
20′	0,390554	0889	1224*	1560	1895*	2231	2566*	2902*	3238*	3574	3910	30′	56	112	168
30′	3910	4246*	4582*	4918*	5255	5591*	5928	6264*	6601	6937*	7274*	20′	56	112	168
40′	7274*	7611	7948	8285	8622	8959*	9296*	9634	9971	0308*	0,400646	10′	56	112	169
50′	0,400646	0984	1321*	1659*	1997	2335	2673	3011	3349*	3687*	4026	68°	56	113	169
22°	4026	4364*	4703	5041*	5380	5719	6057*	6396*	6735*	7074*	7413*	50′	56	113	169
10′	7413*	7753	8092	8431*	8771	9110*	9450	9790	0129*	0469*	0,410809*	40′	57	113	170
20′	0,410809*	1149*	1489*	1829*	2170	2510*	2851	3191*	3532	3872*	4213*	30′	57	113	170
30′	4213*	4554	4895	5236	5577	5918*	6259*	6601	6942*	7284	7625*	20′	57	114	171
40′	7625*	7967	8309	8650*	8992*	9334*	9676*	0019	0361	0703*	0,421046	10′	57	114	171
50′	0,421046	1388*	1731	2073*	2416*	2759	3102	3445	3788	4131*	4474*	67°	57	114	171
23°	4474*	4818	5161*	5505	5848*	6192	6536	6879*	7223*	7567*	7912	50′	57	115	172
10′	7912	8256	8600*	8944*	9289	9633*	9978*	0323	0668	1012*	0,431357*	40′	57	115	172
20′	0,431357*	1702*	2048	2393	2738*	3084	3429*	3775	4120*	4466*	4812	30′	58	115	173
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10′′**	**20′′**	**30′′**
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	**1′**	**2′**	**3′**	**4′**	**5′**	**6′**	**7′**	**8′**	**9′**	**10′**		**10″**	**20″**	**30″**
30′	4812	5158	5504	5850	6196*	6542*	6889	7235*	7582	7928*	8275*	**20′**	58	115	173
40′	8275*	8622	8969	9316	9663	0010*	0357*	0705	1052*	1400	**0,44**1747*	**10′**	58	116	174
50′	**0,44**1747*	2095	2443	2791	3139	3487	3835	4183	4531*	4880	5228*	**66°**	58	116	174
24°	5228*	5577	5925*	6274*	6623*	6972*	7321*	7670*	8019*	8369	8718*	**50′**	58	116	174
10′	8718*	9068	9417*	9767*	0117	0467	0817	1167	1517	1867*	**0,45**2217*	**40′**	58	117	175
20′	**0,45**2217*	2568	2918*	3269	3620	3970*	4321*	4672*	5023*	5375	5726	**30′**	58	117	175
30′	5726	6077*	6429	6780*	7132	7483*	7835*	8187*	8539*	8891*	9243*	**20′**	59	117	176
40′	9243*	9596	9948*	0301	0653*	1006	1359	1711*	2064*	2417*	**0,46**2771	**10′**	59	118	176
50′	**0,46**2771	3124	3477*	3831	4184*	4538	4891*	5245*	5599*	5953*	6307*	**65°**	59	118	177
25°	6307*	6661*	7016	7370*	7724*	8079*	8434	8788*	9143*	9498*	9853*	**50′**	59	118	177
10′	9853*	0209	0564	0919*	1275	1630*	1986	2341*	2697*	3053*	**0,47**3409*	**40′**	59	119	178
20′	**0,47**3409*	3765*	4122	4478	4834*	5191	5548	5904*	6261*	6618*	6975*	**30′**	59	119	178
30′	6975*	7332*	7689*	8047	8404*	8762	9119*	9477	9835	0193	**0,48**0551	**20′**	60	119	179
40′	**0,48**0551	0909	1267	1625*	1984	2342*	2701	3060	3418*	3777*	4136*	**10′**	60	120	179
50′	4136*	4495*	4855	5214	5573*	5933	6293	6652*	7012*	7372*	7732*	**64°**	60	120	180
26°	7732*	8092*	8452*	8813	9173*	9534	9894*	0255*	0616*	0977*	**0,49**1338*	**50′**	60	120	180
10′	**0,49**1338*	1699*	2061	2422	2783*	3145	3507	3868*	4230*	4592*	4954*	**40′**	60	121	181
20′	4954*	5317	5679	6041*	6404	6766*	7129*	7492	7855	8218	8581*	**30′**	60	121	181
30′	8581*	8944*	9308	9671*	0035	0398*	0762*	1126*	1490*	1854*	**0,50**2218*	**20′**	61	121	182
40′	**0,50**2218*	2583	2947*	3312	3676*	4041	4406	4771	5136	5501*	5866*	**10′**	61	122	182
50′	5866*	6232	6597*	6963	7328*	7694*	8060*	8426*	8792*	9159	9525	**63°**	61	122	183
27°	9525	9891*	0258	0625	0991*	1358*	1725*	2092*	2460	2827*	**0,51**3194*	**50′**	61	122	183
10′	**0,51**3194*	3562*	3930	4297*	4665*	5033*	5401*	5770	6138	6506*	6875	**40′**	61	123	184
20′	6875	7244	7612*	7981*	8350*	8719*	9089	9458	9827*	0197	**0,52**0567	**30′**	62	123	185
30′	**0,52**0567	0936*	1306*	1676*	2046*	2417	2787	3157*	3528	3899	4269*	**20′**	62	123	185

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
40′	4269*	4640*	5011*	5382*	5754	6125	6496*	6868	7240	7611*	7983*	10′	62	124	186
50′	7983*	8355*	8728	9100	9472*	9845	0217*	0590*	0963	1336	**0,531**709	**62°**	62	124	186
28°	**0,531**709	2082*	2455*	2829	3202*	3576*	3950	4324	4698	5072	5446	50′	62	125	187
10′	5446	5820*	6195	6569*	6944*	7319	7694	8069	8444*	8819*	9195	40′	62	125	187
20′	9195	9570*	9946	0322	0697*	1073*	1450	1826	2202*	2579	**0,542**955*	30′	63	125	188
30′	**0,542**955*	3332	3709	4086	4463	4840	5217*	5595	5972*	6350	6728	20′	63	126	189
40′	6728	7105*	7484	7862	8240	8618*	8997	9375*	9754*	0133*	**0,550**512*	10′	63	126	189
50′	**0,550**512*	0891*	1270*	1650	2029*	2409	2788*	3168*	3548*	3928*	4309	**61°**	63	127	190
29°	4309	4689	5069*	5450	5831	6211*	6592*	6973*	7355	7736	8117*	50′	63	127	190
10′	8117*	8499	8881	9262*	9644*	0026*	0409	0791	1173*	1556	**0,561**939	40′	64	127	191
20′	**0,561**939	2321*	2704*	3087*	3471	3854	4237*	4621	5005	5388*	5772*	30′	64	128	192
30′	5772*	6156*	6541	6925	7309*	7694	8079	8463*	8848*	9233*	9619	20′	64	128	192
40′	9619	0004	0389*	0775*	1161	1547	1933	2319	2705	3091*	**0,573**478	10′	64	129	193
50′	**0,573**478	3864*	4251*	4638	5025*	5412*	5799*	6187	6574*	6962	7350	**60°**	65	129	194
30°	7350	7738	8126	8514	8902*	9291	9679*	0068	0457	0846	**0,581**235	50′	65	129	194
10′	**0,581**235	1624*	2013*	2403	2793	3182*	3572*	3962*	4352*	4743	5133*	40′	65	130	195
20′	5133*	5524	5914*	6305*	6696*	7087*	7478*	7870	8261*	8653	9045	30′	65	130	196
30′	9045	9436*	9828*	0221	0613	1005*	1398	1791	2183*	2576*	**0,592**969*	20′	65	131	196
40′	**0,592**969*	3363	3756*	4150	4543*	4937	5331	5725	6119*	6513*	6908	10′	66	131	197
50′	6908	7303	7697*	8092*	8487*	8882*	9278	9673*	0069	0464*	**0,600**860*	**59°**	66	132	198
31°	**0,600**860*	1256*	1652*	2048*	2445	2841*	3238*	3635	4032	4429	4826*	50′	66	132	198
10′	4826*	5224	5621*	6019	6416*	6814*	7212*	7611	8009*	8408	8806*	40′	66	133	199
20′	8806*	9205	9604	0003	0402*	0801*	1201	1601	2000*	2400*	**0,612**800*	30′	67	133	200
30′	**0,612**800*	3200*	3601	4001*	4402	4803	5204	5605	6006	6407*	6809	20′	67	134	200
40′	6809	7210*	7612*	8014*	8416*	8818*	9221	9623*	0026	0429	**0,620**831*	10′	67	134	201
50′	**0,620**831*	1235	1638	2041*	2445	2848*	3252*	3656*	4060*	4464*	4869	**58°**	67	135	202
32°	4869	5273*	5678*	6083	6488	6893*	7298*	7704	8109*	8515*	8921	50′	68	135	203
10′	8921	9327	9733*	0139*	0546	0953	1359*	1766*	2173*	2580*	**0,632**988	40′	68	136	203
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	**1′**	**2′**	**3′**	**4′**	**5′**	**6′**	**7′**	**8′**	**9′**	**10′**		**10″**	**20″**	**30″**
20′	**0,63**2988	3395*	3803*	4211	4619	5027	5435*	5844	6252*	6661	7070	**30′**	68	136	204
30′	7070	7479	7888	8297*	8707	9116*	9526*	9936*	0346*	0756*	**0,64**1167	**20′**	68	137	205
40′	**0,64**1167	1577*	1988*	2399	2810	3221*	3632*	4044	4456	4867*	5279*	**10′**	69	137	206
50′	5279*	5691*	6104	6516	6929	7341*	7754*	8167*	8580*	8994	9407*	**57°**	69	138	206
33°	9407*	9821	0235	0648*	1063	1477	1891*	2306	2721	3136	**0,65**3551	**50′**	69	138	207
10′	**0,65**3551	3966	4381*	4797	5212*	5628*	6044*	6460*	6877	7293*	7710	**40′**	69	139	208
20′	7710	8127	8544	8961	9378*	9795*	0213*	0631	1049	1467	**0,66**1885*	**30′**	70	139	209
30′	**0,66**1885*	2303*	2722*	3141	3560	3979	4398	4817*	5237	5657	6076*	**20′**	70	140	210
40′	6076*	6496*	6917	7337	7757*	8178*	8599	9020	9441*	9862*	**0,67**0284	**10′**	70	140	210
50′	**0,67**0284	0706	1127*	1549*	1972	2394	2816*	3239*	3662	4085	4508*	**56°**	70	141	211
34°	4508*	4931*	5355	5778*	6202*	6626*	7050*	7475	7899*	8324	8749	**50′**	71	141	212
10′	8749	9174	9599	0024*	0450	0875*	1301*	1727*	2153*	2580	**0,68**3006*	**40′**	71	142	213
20′	**0,68**3006*	3433	3860	4287	4714	5141*	5569	5996*	6424*	6852*	7280*	**30′**	71	142	214
30′	7280*	7709	8137*	8566*	8995	9424*	9853*	0283	0712*	1142*	**0,69**1572	**20′**	72	143	215
40′	**0,69**1572	2002*	2432*	2863	3293*	3724*	4155*	4586*	5018	5449*	5881	**10′**	72	144	215
50′	5881	6313	6745	7177	7609*	8042	8474*	8907*	9340*	9774	**0,70**0207*	**55°**	72	144	216
35°	**0,70**0207*	0641	1074*	1508*	1942*	2377	2811*	3246	3681	4116	4551	**50′**	72	145	217
10′	4551	4986*	5422	5858	6294	6730	7166	7602*	8039	8476	8913	**40′**	73	145	218
20′	8913	9350	9787*	0225	0663	1100*	1538*	1977	2415*	2854	**0,71**3293	**30′**	73	146	219
30′	**0,71**3293	3732	4171	4610*	5050	5489*	5929*	6369*	6810	7250	7691	**20′**	73	147	220
40′	7691	8131*	8572*	9014	9455	9896*	0338*	0780*	1222*	1665	**0,72**2107*	**10′**	74	147	221
50′	**0,72**2107*	2550	2993	3436	3879	4322*	4766	5210	5654	6098	6542*	**54°**	74	148	222
36°	6542*	6987	7431*	7876*	8321*	8767	9212*	9658	0104	0550	**0,73**0996	**50′**	74	148	223
10′	**0,73**0996	1442*	1889	2336	2783	3230	3677*	4125	4573	5020*	5469	**40′**	75	149	224
20′	5469	5917	6365*	6814*	7263*	7712*	8161*	8611	9061	9511	9961	**30′**	75	150	225

30′	9961	0411	0861*	1312	1763	2214	2665*	3116*	3568*	4020	0,744472	20′	75	150	226
40′	0,744472	4924*	5377	5829*	6282	6735	7188*	7641*	8095*	8549	9003	10′	75	151	226
50′	9003	9457*	9911*	0366	0821	1276	1731	2186*	2642	3098	0,753554	53°	76	152	227
37°	0,753554	4010	4466*	4923	5379*	5836*	6294	6751	7209	7666*	8124*	50′	76	152	228
10′	8124*	8582*	9041	9499*	9958*	0417*	0876*	1336	1795*	2255*	0,762715*	40′	76	153	229
20′	0,762715*	3175*	3636	4096*	4557*	5018*	5479*	5941	6403	6864*	7326*	30′	77	154	231
30′	7326*	7789	8251*	8714	9177	9640	0103*	0567	1030*	1494*	0,771958*	20′	77	154	232
40′	0,771958*	2423	2887*	3352*	3817*	4282*	4748	5213*	5679*	6145*	6611*	10′	78	155	233
50′	6611*	7078	7544*	8011*	8478*	8946	9413*	9881	0349	0817	0,781285*	52°	78	156	234
38°	0,781285*	1754	2222*	2691*	3161	3630*	4100	4569*	5040	5510	5980*	50′	78	156	235
10′	5980*	6451	6922	7393*	7864*	8336	8808	9280	9752	0224*	0,790697	40′	79	157	236
20′	0,790697	1170	1643	2116*	2590	3063*	3537*	4012	4486	4961	5435*	30′	79	158	237
30′	5435*	5910*	6386	6861*	7337	7813	8289*	8765*	9242	9719	0,800196	20′	79	159	238
40′	0,800196	0673*	1151	1628*	2106*	2584*	3063	3541*	4020*	4499*	4978*	10′	80	159	239
50′	4978*	5458	5938	6418	6898	7378*	7859	8340	8821	9302*	9784	51°	80	160	240
39°	9784	0265*	0747*	1229*	1712	2195	2677*	3161	3644	4127*	0,814611*	50′	80	161	241
10′	0,814611*	5095*	5580	6064*	6549	7034	7519	8004*	8490*	8976	9462*	40′	81	162	242
20′	9462*	9948*	0435	0922	1409	1896*	2384	2871*	3359*	3847*	0,824336	30′	81	162	244
30′	0,824336	4825	5313*	5803	6292	6782	7271*	7762	8252	8742*	9233*	20′	82	163	245
40′	9233*	9724*	0215*	0707	1199	1691	2183	2675*	3168*	3661*	0,834154*	10′	82	164	246
50′	0,834154*	4648	5141*	5635*	6129*	6624	7118*	7613*	8108*	8604	9099*	50°	82	165	247
40°	9099*	9595	0091*	0587*	1084	1581	2078	2575	3072*	3570*	0,844068*	50′	83	166	248
10′	0,844068*	4567	5065*	5564	6063	6562	7061*	7561*	8061*	8561*	9062	40′	83	166	250
20′	9062	9563	0064	0565	1066*	1568	2070	2572*	3075	3577*	0,854080*	30′	84	167	251
30′	0,854080*	4583*	5087	5591	6094*	6599	7103*	7608	8113	8618*	9124	20′	84	168	252
40′	9124	9629*	0135*	0641*	1148	1655	2162	2669	3176*	3684*	0,864192*	10′	84	169	253
50′	0,864192*	4700*	5209	5718	6227	6736	7245*	7755*	8265*	8776	9286*	49°	85	170	255
41°	9286*	9797*	0308*	0820	1331*	1843	2355*	2867*	3380*	3893*	0,874406*	50′	85	171	256
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
10′	0,874406*	4920	5433*	5947*	6461*	6976	7491	8006	8521	9036*	9552*	40′	86	171	257
20′	9552*	0068*	0585	1101*	1618*	2135*	2653	3170*	3688*	4206*	0,884725	30′	86	172	259
30′	0,884725	5243*	5762*	6282	6801*	7321	7841*	8361*	8882	9403	9924	20′	87	173	260
40′	9924	0445*	0967	1489	2011*	2534	3056*	3579*	4103	4626*	0,895150*	10′	87	174	261
50′	0,895150*	5674*	6199	6723*	7248*	7773*	8299	8825	9351	9877	0,900404	48°	88	175	263
42°	0,900404	0930*	1458	1985	2513	3041	3569	4097*	4626*	5155*	5685	50′	88	176	264
10′	5685	6214*	6744*	7274*	7805	8336	8867	9398	9929*	0461*	0,910994	40′	88	177	265
20′	0,910994	1526	2059	2592	3125	3659	4192*	4727	5261	5796	6331	30′	89	178	267
30′	6331	6866	7402	7937*	8474	9010	9547	0084	0621	1158*	0,921696*	20′	89	179	268
40′	0,921696*	2235	2773	3312	3851	4390	4930	5469*	6010	6550*	7091	10′	90	180	270
50′	7091	7632	8173*	8715	9257	9799*	0342	0884*	1427*	1971	0,932515	47°	90	181	271
43°	0,932515	3059	3603	4147*	4692*	5237*	5783	6329	6875	7421*	7968	50′	91	182	273
10′	7968	8515	9062*	9610	0157*	0706	1254*	1803	2352	2901*	0,943451	40′	91	183	274
20′	0,943451	4001	4551*	5102	5652*	6204	6755*	7307	7859	8411*	8964*	30′	92	184	276
30′	8964*	9517*	0070*	0624	1178	1732*	2287	2841*	3397	3952*	0,954508	20′	92	185	277
40′	0,954508	5064	5620*	6177	6734	7291*	7849	8407	8965*	9524	0,960082*	10′	93	186	279
50′	0,960082*	0642	1201*	1761	2321*	2881*	3442*	4003*	4565	5126*	5688*	46°	93	187	280
44°	5688*	6251	6813*	7376*	7939*	8503*	9067	9631*	0196	0761	0,971326	50′	94	188	282
10′	0,971326	1891*	2457*	3023*	3590	4156*	4723*	5291	5859	6427	6995*	40′	94	189	283
20′	6995*	7564	8133	8702*	9272	9842	0412*	0983	1554	2125*	0,982697	30′	95	190	285
30′	0,982697	3269	3841*	4414	4987	5560	6133*	6707*	7282	7856*	8431*	20′	96	191	287
40′	8431*	9006*	9582	0158	0734*	1311	1888	2465	3042*	3620*	0,994199	10′	96	192	288
50′	0,994199	4777*	5356*	5935*	6515	7095	7675*	8256	8837	9418	1,000000	45°	97	193	290
45°	1,00000	0058	0116	0174*	0232*	0291	0349*	0408	0466*	0524*	1,00583	50′	10	19	29

10′	0583	0642	0700*	0759	0817*	0876	0935	0993*	1052*	1111*	1170	40′	10	20	29
20′	1170	1229	1288	1347	1406	1465	1524	1583	1642	1701*	1760*	30′	10	20	30
30′	1760*	1819*	1879	1938*	1997*	2057	2116*	2176	2235*	2295	2354*	20′	10	20	30
40′	2354*	2414	2473*	2533	2593	2652*	2712*	2772	2832	2892	2952	10′	10	20	30
50′	2952	3011*	3071*	3131*	3191*	3252	3312	3372	3432*	3492*	3553	44°	10	20	30
46°	3553	3613	3673*	3734	3794	3854*	3915	3975*	4036	4097	4157*	50′	10	20	30
10′	4157*	4218	4279	4339*	4400*	4461	4522	4583	4644	4704*	4765*	40′	10	20	30
20′	4765*	4827	4888	4949	5010	5071*	5132*	5194	5255	5316*	5378	30′	10	20	31
30′	5378	5439	5500*	5562	5623*	5685	5747	5808*	5870	5932	5993*	20′	10	21	31
40′	5993*	6055*	6117	6179	6241	6303	6365	6427	6489	6551	6613	10′	10	21	31
50′	6613	6675*	6737*	6800	6862	6924*	6987	7049	7111*	7174	7236*	43°	10	21	31
47°	7236*	7299	7362	7424*	7487	7550	7612*	7675*	7738	7801	7864	50′	10	21	31
10′	7864	7927	7990	8053	8116	8179	8242*	8305*	8368*	8432	8495*	40′	11	21	32
20′	8495*	8558*	8622	8685*	8749	8812*	8876	8939*	9003	9067	9130*	30′	11	21	32
30′	9130*	9194*	9258	9322	9386	9450	9513*	9577*	9642	9706	9770	20′	11	21	32
40′	9770	9834	9898*	9962*	0027	0091	0155*	0220	0284*	0349	1,10413*	10′	11	21	32
50′	1,10413*	0478	0542*	0607	0672	0736*	0801*	0866*	0931	0996	1061	42°	11	22	32
48°	1061	1126	1191	1256	1321	1386*	1451*	1517	1582	1647*	1713	50′	11	22	33
10′	1713	1778	1843*	1909	1974*	2040*	2106	2171*	2237*	2303	2369	40′	11	22	33
20′	2369	2434*	2500*	2566*	2632*	2698*	2764*	2830*	2897	2963	3029	30′	11	22	33
30′	3029	3095*	3162	3228	3294*	3361	3427*	3494	3560*	3627	3694	20′	11	22	33
40′	3694	3760*	3827*	3894	3961	4028	4095	4162	4229	4296	4363	10′	11	22	33
50′	4363	4430	4497*	4564*	4632	4699	4766*	4834	4901*	4969	5036*	41°	11	22	34
49°	5036*	5104	5172	5239*	5307*	5375	5443	5511	5578*	5646*	5714*	50′	11	23	34
10′	5714*	5783	5851	5919	5987	6055*	6124	6192	6260*	6329	6397*	40′	11	23	34
20′	6397*	6466	6534*	6603	6672	6740*	6809	6878	6947	7016	7084*	30′	11	23	34
30′	7084*	7153*	7222*	7292	7361	7430	7499*	7568*	7638	7707*	7776*	20′	12	23	35
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
40′	7776*	7846	7915*	7985*	8055	8124*	8194	8264	8334	8403*	8473*	10′	12	23	35
50′	8473*	8543*	8613*	8683*	8753*	8823*	8894	8964	9034*	9104*	9175	40°	12	23	35
50°	9175	9245*	9316	9386*	9457	9527*	9598*	9669	9740	9810*	9881*	50′	12	24	35
10′	9881*	9952*	0023*	0094*	0165*	0236*	0308	0379	0450*	0521*	1,20593	40′	12	24	36
20′	1,20593	0664*	0736	0807*	0879	0950*	1022*	1094	1166	1237*	1309*	30′	12	24	36
30′	1309*	1381*	1453*	1525*	1597*	1669*	1741*	1814	1886	1958*	2031	20′	12	24	36
40′	2031	2103*	2176	2248*	2321	2393*	2466*	2539	2612	2684*	2757*	10′	12	24	36
50′	2757*	2830*	2903*	2976*	3049*	3123	3196	3269*	3342*	3416	3489*	39°	12	24	37
51°	3489*	3563	3636*	3710	3783*	3857*	3931	4005	4078*	4152*	4226*	50′	12	25	37
10′	4226*	4300*	4374*	4449	4523	4597	4671*	4746	4820	4894*	4969	40′	12	25	37
20′	4969	5043*	5118	5193	5267*	5342*	5417	5492	5567	5642	5717	30′	12	25	37
30′	5717	5792	5867	5942*	6017*	6093	6168*	6244	6319	6395	6470*	20′	13	25	38
40′	6470*	6546	6621*	6697*	6773*	6849	6925	7001	7077	7153	7229*	10′	13	25	38
50′	7229*	7305*	7382	7458	7534*	7611	7687*	7764	7840*	7917	7994	38°	13	25	38
52°	7994	8070*	8147*	8224*	8301*	8378*	8455*	8532*	8609*	8687	8764	50′	13	26	39
10′	8764	8841*	8919	8996*	9074	9151*	9229	9307	9384*	9462*	9540*	40′	13	26	39
20′	9540*	9618	9696	9774*	9852*	9930*	0009	0087	0165*	0244	1,30322*	30′	13	26	39
30′	1,30322*	0401	0479*	0558	0636*	0715*	0794*	0873	0952	1031	1110	20′	13	26	39
40′	1110	1189*	1268*	1348	1427	1506*	1586	1665*	1745	1824*	1904	10′	13	26	40
50′	1904	1984	2063*	2143*	2223*	2303*	2383*	2463*	2543*	2624	2704	37°	13	27	40
53°	2704	2784*	2865	2945*	3026	3106*	3187	3268	3348*	3429*	3510*	50′	13	27	40
10′	3510*	3591*	3672*	3753*	3835	3916	3997*	4078*	4160	4241*	4323	40′	14	27	41
20′	4323	4404*	4486*	4568	4650	4731*	4813*	4895*	4977*	5060	5142	30′	14	27	41
30′	5142	5224	5306*	5389	5471*	5554	5636*	5719	5802	5884*	5967*	20′	14	28	41
40′	5967*	6050*	6133*	6216*	6299*	6382*	6466	6549	6632*	6716	6799*	10′	14	28	42

50′	6799*	6883	6966*	7050	7134	7218	7301*	7385*	7469*	7554	7638	**36°**	14	28	42
54°	7638	7722	7806*	7891	7975*	8060	8144*	8229	8313*	8398*	8483*	**50′**	14	28	42
10′	8483*	8568	8653	8738	8823*	8908*	8994	9079	9164*	9250	9335*	**40′**	14	28	43
20′	9335*	9421	9506*	9592*	9678*	9764	9850	9936	0022	0108*	**1,40194***	**30′**	14	29	43
30′	**1,40194***	0281	0367	0453*	0540	0627	0713*	0800	0887	0974	1060*	**20′**	14	29	43
40′	1060*	1147*	1235	1322	1409	1496*	1584	1671*	1759	1846*	1934	**10′**	15	29	44
50′	1934	2021*	2109*	2197*	2285*	2373*	2461*	2549*	2638	2726	2814*	**35°**	15	29	44
55°	2814*	2903	2991*	3080	3169	3257*	3346*	3435*	3524*	3613*	3702*	**50′**	15	30	44
10′	3702*	3791*	3881	3970	4059*	4149	4238*	4328*	4418	4508	4598	**40′**	15	30	45
20′	4598	4687*	4777*	4868	4958	5048*	5138*	5229	5319*	5410	5500*	**30′**	15	30	45
30′	5500*	5591*	5682	5773	5864	5955	6046	6137	6228*	6320	6411	**20′**	15	30	46
40′	6411	6502*	6594*	6686	6777*	6869*	6961*	7053	7145*	7237*	7329*	**10′**	15	31	46
50′	7329*	7422	7514	7606*	7699	7791*	7884*	7977	8070	8163	8256	**34°**	15	31	46
56°	8256	8349	8442	8535*	8628*	8722	8815*	8909	9002*	9096*	9190	**50′**	16	31	47
10′	9190	9284	9378	9472	9566	9660*	9754*	9849	9943*	0038	**1,50132***	**40′**	16	31	47
20′	**1,50132***	0227*	0322	0417	0512	0607	0702	0797	0892*	0988	1083*	**30′**	16	32	48
30′	1083*	1179	1274*	1370	1466	1562	1657*	1753*	1850	1946	2042*	**20′**	16	32	48
40′	2042*	2138*	2235	2331*	2428*	2525	2622	2719	2816	2913	3010	**10′**	16	32	48
50′	3010	3107	3204*	3302	3399*	3497	3594*	3692*	3790*	3888	3986	**33°**	16	33	49
57°	3986	4084*	4182*	4281	4379	4477*	4576	4675	4773*	4872*	4971*	**50′**	16	33	49
10′	4971*	5070*	5169*	5268*	5368	5467	5566*	5666	5766	5865*	5965*	**40′**	17	33	50
20′	5965*	6065	6165	6265	6365*	6465*	6566	6666*	6767	6867*	6968*	**30′**	17	33	50
30′	6968*	7069	7170	7271	7372	7473*	7574*	7676	7777*	7879	7980*	**20′**	17	34	51
40′	7980*	8082*	8184	8286	8388	8490	8592*	8694*	8797	8899*	9002	**10′**	17	34	51
50′	9002	9105	9207*	9310*	9413*	9516*	9619*	9723	9826	9929*	**1,60033**	**32°**	17	34	52
58°	**1,60033**	0137	0240*	0344*	0448*	0552*	0656*	0760*	0865	0969*	1074	**50′**	17	35	52
10′	1074	1178*	1283	1388	1493	1598	1703	1808	1913*	2019	2124*	**40′**	18	35	53
20′	2124*	2230	2335*	2441*	2547*	2653*	2759*	2865*	2972	3078*	3185	**30′**	18	35	53
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	**0′**		**10″**	**20″**	**30″**
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		10″	20″	30″
30′	3185	3291*	3398	3505	3612	3719	3826	3933*	4040*	4148	4255*	**20′**	18	36	54
40′	4255*	4363	4471	4578*	4686*	4794*	4903	5011	5119*	5228	5336*	**10′**	18	36	54
50′	5336*	5445	5554	5662*	5771*	5880*	5990	6099	6208*	6318	6427*	**31°**	18	36	55
59°	6427*	6537*	6647	6757	6867	6977*	7087*	7198	7308*	7419	7529*	**50′**	18	37	55
10′	7529*	7640*	7751*	7862*	7973*	8084*	8196	8307*	8419	8530*	8642*	**40′**	19	37	56
20′	8642*	8754	8866	8978*	9090*	9203	9315*	9428	9540*	9653	9766	**30′**	19	37	56
30′	9766	9879	9992	0105*	0218*	0332	0445*	0559*	0673	0787	**1,70901**	**20′**	19	38	57
40′	**1,70901**	1015	1129	1243*	1358	1472*	1587*	1702	1817	1932	2047	**10′**	19	38	57
50′	2047	2162*	2277*	2393	2509	2624*	2740*	2856*	2972*	3088*	3205	**30°**	19	39	58
60°	3205	3321	3438	3554*	3671	3788	3905	4022	4139*	4257	4374*	**50′**	19	39	58
10′	4374*	4492	4609*	4727*	4845*	4963*	5081*	5200	5318*	5437	5555*	**40′**	20	39	59
20′	5555*	5674*	5793*	5912*	6031*	6151	6270*	6390	6509*	6629	6749	**30′**	20	40	60
30′	6749	6869	6989*	7109*	7230	7350*	7471	7592	7713	7834	7955	**20′**	20	40	60
40′	7955	8076*	8197*	8319	8441	8562*	8684*	8806*	8928*	9051	9173*	**10′**	20	41	61
50′	9173*	9296	9418*	9541*	9664*	9787*	9910*	0034	0157*	0281	**1,80404***	**29°**	21	41	62
61°	**1,80404***	0528*	0652*	0776*	0900*	1025	1149*	1274	1399	1523*	1648*	**50′**	21	41	62
10′	1648*	1774	1899	2024*	2150	2275*	2401*	2527*	2653*	2779*	2906	**40′**	21	42	63
20′	2906	3032*	3159	3286	3412*	3539*	3667	3794	3921*	4049	4177	**30′**	21	42	64
30′	4177	4304*	4432*	4560*	4689	4817*	4946	5074*	5203*	5332*	5461*	**20′**	21	43	64
40′	5461*	5590*	5720	5849*	5979	6109	6238*	6369	6499	6629*	6760	**10′**	22	43	65
50′	6760	6890*	7021	7152	7283	7414*	7545*	7677	7808*	7940*	8072*	**28°**	22	44	66
62°	8072*	8204*	8336*	8469	8601*	8734	8867	9000	9133	9266	9399*	**50′**	22	44	66
10′	9399*	9533	9666*	9800*	9934*	0068*	0202*	0337	0471*	0606*	**1,90741**	**40′**	22	45	67
20′	**1,90741**	0876	1011*	1146*	1282	1417*	1553*	1689*	1825*	1961*	2098	**30′**	23	45	68
30′	2098	2234*	2371	2508	2645	2782	2919*	3056*	3194*	3332	3470	**20′**	23	46	69

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
40′	3470	3608	3746	3884*	4023	4161*	4300*	4439*	4578*	4718	4857*	10′	23	46	69
50′	4857*	4997	5137	5277	5417	5557	5697*	5838	5979	6119*	6261	**27°**	23	47	70
63°	6261	6402	6543*	6685	6826*	6968*	7110*	7252*	7395	7537*	7680*	50′	24	47	71
10′	7680*	7823	7966	8109*	8252*	8396	8540	8683*	8827*	8972	9116	40′	24	48	72
20′	9116	9260*	9405*	9550	9695	9840*	9985*	0131	0277	0422*	**2,00568***	30′	24	48	73
30′	**2,00568***	0715	0861*	1008	1154*	1301*	1448*	1595*	1743	1890*	2038*	20′	24	49	73
40′	2038*	2186*	2334*	2482*	2631	2779*	2928*	3077*	3226*	3376	3525*	10′	25	50	74
50′	3525*	3675	3825	3975	4125	4275*	4426	4577	4728	4879	5030	**26°**	25	50	75
64°	5030	5181*	5333	5485	5637	5789*	5941*	6094	6247	6400	6553	50′	25	51	76
10′	6553	6706	6859*	7013*	7167	7321	7475*	7630	7784*	7939	8094	40′	26	51	77
20′	8094	8249*	8404*	8560	8716	8872	9028	9184	9340*	9497*	9654	30′	26	52	78
30′	9654	9811	9968*	0126	0283*	0441*	0599*	0757*	0916	1074*	**2,11233**зГ	20′	26	53	79
40′	**2,11233**	1392	1551*	1711	1870*	2030	2190	2350	2510*	2671	2832	10′	27	53	80
50′	2832	2993	3154	3315*	3477	3638*	3800*	3963	4125	4287*	4450*	**25°**	27	54	81
65°	4450*	4613*	4776*	4940	5103*	5267*	5431*	5595*	5760	5924*	6089*	50′	27	55	82
10′	6089*	6254*	6419*	6585	6750*	6916*	7082*	7249	7415*	7582	7749	40′	28	55	83
20′	7749	7916	8083*	8251	8418*	8586*	8755	8923	9092	9260*	9429*	30′	28	56	84
30′	9429*	9599	9768*	9938	0108	0278	0448*	0619	0790	0961	**2,21132**	20′	28	57	85
40′	**2,21132**	1303*	1475	1647	1819	1991*	2164	2337	2510	2683	2856*	10′	29	57	86
50′	2856*	3030	3204	3378	3552*	3727	3902	4077	4252	4427*	4603*	**24°**	29	58	87
66°	4603*	4779*	4955*	5132	5308*	5485*	5662*	5840	6017*	6195*	6373*	50′	29	59	88
10′	6373*	6551*	6730	6909	7088	7267	7446*	7626	7806	7986*	8166*	40′	30	60	90
20′	8166*	8347*	8528	8709*	8890*	9072*	9254	9436*	9618*	9801	9984	30′	30	61	91
30′	9984	0167	0350*	0534	0718	0902	1086	1270*	1455*	1640*	**2,31826**	20′	31	61	92
40′	**2,31826**	2011*	2197	2383	2569*	2756	2943	3130	3317	3505	3692*	10′	31	62	93
50′	3692*	3880*	4069	4257*	4446*	4635*	4825	5014*	5204*	5394*	5585	**23°**	32	63	95
67°	5585	5775*	5966*	6158	6349	6541	6733	6925	7117*	7310*	7503*	50′	32	64	96
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Котангенсы														

Продолжение табл. IX.5 (часть первая)

	Тангенсы												Поправки		
	0′	**1′**	**2′**	**3′**	**4′**	**5′**	**6′**	**7′**	**8′**	**9′**	**10′**		**10″**	**20″**	**30″**
10′	7503*	7697	7890*	8084	8278*	8472*	8667*	8862*	9057*	9253	9448*	**40′**	32	65	97
20′	9448*	9644*	9841	0037*	0234*	0431*	0629	0826*	1024*	1222*	**2,4**1421	**30′**	33	66	99
30′	**2,4**1421	1620	1819	2018*	2218	2418	2618	2818*	3019	3220	3421*	**20′**	33	67	100
40′	3421*	3623	3825	4027	4229*	4432*	4635*	4838*	5042*	5246	5450*	**10′**	34	68	101
50′	5450*	5655	5859*	6064*	6270	6475*	6681*	6888	7094*	7301*	7508*	**22°**	34	69	103
68°	7508*	7716	7923*	8131*	8340	8548*	8757*	8967	9176*	9386	9596*	**50′**	35	70	104
10′	9596*	9807	0017*	0228*	0440	0651*	0863*	1076	1288*	1501*	**2,5**1715	**40′**	35	71	106
20′	**2,5**1715	1928*	2142	2356*	2571	2785*	3001	3216*	3432	3648	3864*	**30′**	36	72	107
30′	3864*	4081*	4298*	4515*	4733*	4951*	5169*	5388*	5607*	5826*	6046	**20′**	36	73	109
40′	6046	6266	6486*	6707	6928	7149*	7371	7593	7815	8037*	8260*	**10′**	37	74	111
50′	8260*	8484	8707*	8931*	9156	9380*	9605*	9830*	0056*	0282*	**2,6**0508*	**21°**	37	75	112
69°	**2,6**0508*	0735*	0962*	1189*	1417*	1645*	1874	2102*	2331*	2561	2791	**50′**	38	76	114
10′	2791	3021	3251*	3482*	3713*	3945	4177	4409*	4642	4875	5108*	**40′**	39	77	116
20′	5108*	5342	5576	5810*	6045*	6280*	6516	6752	6988*	7225	7462	**30′**	39	78	118
30′	7462	7699*	7937	8175	8413*	8652*	8891*	9131	9371	9611*	9852*	**20′**	40	80	119
40′	9852*	0093*	0335	0576*	0819	1061*	1304*	1548	1792	2036	**2,7**2280*	**10′**	40	81	121
50′	**2,7**2280*	2525*	2771	3016*	3262*	3509	3756	4003*	4251	4499	4747*	**20°**	41	82	123
70°	4747*	4996*	5245*	5495*	5745*	5996	6246*	6498	6749*	7001*	7254	**50′**	42	83	125
10′	7254	7507	7760*	8014	8268*	8523	8778	9033	9289	9545	9801*	**40′**	42	85	127
20′	9801*	0059	0316	0574	0832*	1091	1350	1610	1870	2130	**2,8**2391	**30′**	43	86	129
30′	**2,8**2391	2652*	2914	3176	3438*	3701*	3965	4229	4493*	4758	5023	**20′**	44	88	131
40′	5023	5289	5555	5821*	6088*	6356	6623*	6892	7160*	7430	7699*	**10′**	45	89	134
50′	7699*	7969*	8240	8511	8782*	9054*	9327	9599*	9873	0146*	**2,9**0421	**19°**	45	91	136
71°	**2,9**0421	0695*	0970*	1246	1522*	1799	2076	2353*	2631*	2909*	3188*	**50′**	46	92	138
10′	3188*	3468	3748	4028	4309	4590*	4872	5154*	5437	5720*	6004	**40′**	47	94	141

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
20′	6004	6288	6573	6858	7143*	7430	7716*	8003*	8291*	8579*	8868	30′	48	95	143
30′	8868	9157*	9447	9737*	0028	0319	0611	0903	1196	1489	3,01783	20′	49	97	146
40′	3,01783	2077	2372	2667	2963	3259*	3556	3853*	4151*	4450	4749	10′	49	99	148
50′	4749	5048*	5348*	5649	5950	6252	6554	6856*	7160	7464	7768	18°	50	101	151
72°	7768	8073	8378*	8684*	8991	9298	9605*	9914	0222*	0532	3,10842	50′	51	102	154
10′	3,10842	1152*	1463*	1775	2087	2399*	2713	3027	3341	3656	3971*	40′	52	104	156
20′	3971*	4288	4604*	4922	5239*	5558	5877	6197	6517	6838	7159	30′	53	106	159
30′	7159	7481	7804	8127	8451	8775	9100	9425*	9752	0078*	3,20406	20′	54	108	162
40′	3,20406	0734	1063	1392	1722	2052*	2383*	2715	3047*	3380*	3714	10′	55	110	165
50′	3714	4048*	4383	4718*	5055	5391*	5729	6067	6405*	6745	7085	17°	56	112	168
73°	7085	7425*	7767	8109	8451*	8794*	9138*	9483	9828*	0174	3,30520*	50′	57	114	172
10′	3,30520*	0868	1215*	1564*	1913*	2263*	2614	2965	3317	3669*	4023	40′	58	117	175
20′	4023	4377	4731*	5087	5443	5800	6157*	6515*	6874*	7234	7594	30′	59	119	178
30′	7594	7955	8316*	8679	9042	9406	9770*	0136	0502	0868*	3,41236	20′	61	121	182
40′	3,41236	1604	1973	2342*	2713	3084	3456	3828*	4202	4576	4951	10′	62	124	186
50′	4951	5326*	5703	6080	6458	6836*	7216	7596	7977	8358*	8741	16°	63	126	189
74°	8741	9124*	9508*	9893*	0279	0665*	1052*	1440*	1829	2219	3,52609	50′	64	129	193
10′	3,52609	3000*	3392*	3785	4178*	4573	4968	5364	5761	6158*	6557	40′	66	131	197
20′	6557	6956*	7356*	7757*	8159*	8562	8965*	9370	9775	0181	3,60588	30′	67	134	201
30′	3,60588	0996	1404*	1814	2224	2635*	3047*	3460*	3874	4289	4704*	20′	69	137	206
40′	4704*	5121	5538	5956*	6375*	6795*	7216*	7638	8061	8484*	8909	10′	70	140	210
50′	8909	9334*	9761	0188	0616	1045*	1475*	1906*	2338	2771	3,73205	15°	72	143	215
75°	3,73205	3639*	4075	4512	4949*	5388	5827*	6268	6709	7151*	7595	50′	73	146	219
10′	7595	8039*	8484*	8931	9378	9826*	0275*	0726	1177	1629*	3,82082*	40′	75	149	224
20′	3,82082*	2537	2992	3448*	3905*	4364	4823*	5283*	5745	6207*	6671	30′	76	153	229
30′	6671	7135*	7601	8068	8535*	9004	9474	9945	0417	0890	3,91364	20′	78	156	234
40′	3,91364	1839	2315*	2792*	3271	3750*	4231*	4713	5196	5680	6165	10′	80	160	240
50′	6165	6651	7138*	7627	8116*	8607	9099	9592	0086	0581*	4,01078	14°	82	164	245
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		10″	20″	30″
	Котангенсы														

Таблица IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
76°	4,01078	1160*	1243*	1326*	1409*	1492*	1575*	1658*	1741*	1824*	1908	1991	2074	**58′**
02′	2074	2157*	2240*	2324	2407*	2490*	2574	2657*	2741	2824*	2908	2991*	3075*	**56′**
04′	3075*	3159	3242*	3326	3410	3493*	3577*	3661*	3745	3829	3913	3997	4081	**54′**
06′	4081	4165	4249	4333	4417*	4501*	4585*	4670	4754	4838*	4922*	5007	5091*	**52′**
08′	5091*	5176	5260*	5345	5429*	5514	5598*	5683	5768	5852*	5937	6022	6107	**13°50′**
76°10′	6107	6191*	6276*	6361*	6446	6531	6616	6701	6786*	6871*	6956*	7041*	7127	**48′**
12′	7127	7212	7297*	7382*	7468	7553*	7638*	7724	7809*	7895	7980*	8066	8151*	**46′**
14′	8151*	8237*	8323	8408*	8494*	8580	8666	8752	8837*	8923*	9009*	9095*	9181*	**44′**
16′	9181*	9267*	9353*	9439*	9526	9612	9698*	9784*	9871	9957	0043*	0130	4,10216	**42′**
18′	4,10216	0302*	0389	0475*	0562	0649	0735*	0822	0909	0995*	1082*	1169	1256	**13°40′**
76°20′	1256	1343	1429*	1516*	1603*	1690*	1777*	1864*	1952	2039	2126	2213*	2300*	**38′**
22′	2300*	2388	2475	2562*	2650	2737*	2824*	2912	3000	3087*	3175	3262*	3350	**36′**
24′	3350	3438	3525*	3613*	3701	3789	3877	3965	4053	4141	4229	4317	4405	**34′**
26′	4405	4493	4581	4669*	4757*	4846	4934	5022*	5111	5199*	5288	5376	5465	**32′**
28′	5465	5553*	5642	5730*	5819	5908	5996*	6085*	6174	6263	6352	6441	6529*	**13°30′**
76°30′	6529*	6618*	6707*	6797	6886	6975	7064	7153*	7242*	7332	7421	7510*	7600	**28′**
32′	7600	7689*	7778*	7868	7957*	8047*	8137	8226*	8316	8406	8495*	8585*	8675	**26′**
34′	8675	8765	8855	8945	9035	9125	9215	9305	9395	9485	9575*	9665*	9756	**24′**
36′	9756	9846	9936*	0027	0117	0207*	0298	0388*	0479	0569*	0660*	0751	4,20841*	**22′**
38′	4,20841*	0932*	1023	1114	1205	1295*	1386*	1477*	1568*	1659*	1750*	1842	1933	**13°20′**
76°40′	1933	2024	2115*	2206*	2298	2389	2480*	2572	2663*	2755	2846*	2938	3029*	**18′**
42′	3029*	3121	3213	3304*	3396*	3488	3580	3671*	3763*	3855*	3947*	4039*	4131*	**16′**
44′	4131*	4223*	4315*	4408	4500	4592*	4684*	4777	4869	4961*	5054	5146*	5239	**14′**

46′	5239	5331*	5424	5516*	5609*	5702	5795	5887*	5980*	6073	6166	6259	6352	**12′**
48′	6352	6445	6538	6631	6724	6817*	6910*	7003*	7097	7190*	7283*	7377	7470*	**13°10′**
76°50′	7470*	7564	7657*	7751	7844*	7938	8031*	8125*	8219	8313	8406*	8500*	8594*	**08′**
52′	8594*	8688*	8782*	8876*	8970*	9064*	9158*	9253	9347	9441	9535*	9630	9724	**06′**
54′	9724	9818*	9913	0007*	0102	0196*	0291	0385*	0480*	0575	0670	0764*	4,30859*	**04′**
56′	4,30859*	0954*	1049*	1144	1239	1334	1429*	1524*	1619*	1714*	1810	1905	2000*	**02′**
58′	2000*	2096	2191*	2286*	2382	2477*	2573	2669	2764*	2860	2956	3051*	3147*	**13°**
77°	3147*	3243	3339	3435	3531	3627	3723	3819	3915	4011	4107*	4203*	4300	**58′**
02′	4300	4396	4492*	4589	4685*	4782	4878*	4975	5071*	5168	5265	5361*	5458*	**56′**
04′	5458*	5555	5652	5749	5846	5943	6040	6137	6234	6331	6428	6525*	6622*	**54′**
06′	6622*	6720	6817*	6914*	7012	7109*	7207	7304*	7402	7500	7597*	7695	7793	**52′**
08′	7793	7890*	7988*	8086*	8184*	8282*	8380*	8478*	8576*	8674*	8772*	8871	8969	**12°50′**
77°10′	8969	9067*	9166	9264	9362*	9461	9559*	9658	9756*	9855*	9954	0052*	4,40151*	**48′**
12′	4,40151*	0250	0349	0448	0547	0646	0745	0844	0943	1042	1141	1240*	1339*	**46′**
14′	1339*	1439	1538*	1637*	1737	1836*	1936	2035*	2135*	2235	2334*	2434*	2534	**44′**
16′	2534	2634	2734	2833*	2933*	3033*	3133*	3233*	3334	3434	3534	3634*	3734*	**42′**
18′	3734*	3835	3935*	4036	4136*	4237	4337*	4438	4538*	4639*	4740	4841	4941*	**12°40′**
77°20′	4941*	5042*	5143*	5244	5345	5446	5547*	5648*	5749*	5851	5952	6053*	6154*	**38′**
22′	6154*	6256	6357*	6459	6560*	6662	6763*	6865	6967	7068*	7170*	7272	7374	**36′**
24′	7374	7476	7578	7680	7782	7884	7986	8088*	8190*	8293	8395	8497*	8600	**34′**
26′	8600	8702	8804*	8907	9010	9112*	9215	9318	9420*	9523*	9626	9729	9832	**32′**
28′	9832	9935	0038	0141	0244	0347*	0450*	0553*	0657	0760*	0863*	0967	4,51070*	**12°30′**
77°30′	4,51070*	1174	1277*	1381*	1485	1588*	1692*	1796	1900	2004	2108	2211*	2316	**28′**
32′	2316	2420	2524	2628	2732*	2836*	2941	3045	3149*	3254	3358*	3463	3567*	**26′**
34′	3567*	3672	3776*	3881*	3986	4091	4196	4300*	4405*	4510*	4615*	4720*	4826	**24′**
36′	4826	4931	5036	5141*	5247	5352	5457*	5563	5668*	5774	5879*	5985	6091	**22′**
	60″	**50″**	**40″**	**30″**	**20″**	**10″**	**60″**	**50″**	**40″**	**30″**	**20″**	**10″**	**0″**	
	Котангенсы													

Продолжение табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
38′	6091	6196*	6302*	6408	6514	6620	6726	6832	6938	7044	7150	7256*	7362*	12°20′
77°40′	7362*	7469	7575	7681*	7788	7894*	8001	8107*	8214	8321	8427*	8534*	8641	18′
42′	8641	8748	8855	8962	9069	9176	9283	9390	9497*	9604*	9712	9819	9926*	16′
44′	9926*	0034	0141*	0249	0356*	0464	0572	0679*	0787*	0895	1003	1111	**4,61**219	14′
46′	**4,61**219	1327	1435	1543	1651	1759*	1867*	1976	2084	2192*	2301	2409*	2518	12′
48′	2518	2626*	2735*	2844	2952*	3061*	3170*	3279	3388	3497	3606	3715	3824*	12°10′
77°50′	3824*	3933*	4042*	4152	4261*	4370*	4480	4589*	4699	4808*	4918*	5028	5137*	08′
52′	5137*	5247*	5357	5467	5577	5687	5797	5907	6017	6127*	6237*	6348	6458	06′
54′	6458	6568*	6679	6789*	6900	7010*	7121	7231*	7342*	7453	7564	7675	7785*	04′
56′	7785*	7896*	8007*	8118*	8230	8341	8452	8563*	8675	8786	8897*	9009	9120*	02′
58′	9120*	9232	9344	9455*	9567	9679	9791	9902*	0014*	0126*	0238*	0350*	**4,70**463	12°
78°	**4,70**463	0575	0687	0799*	0912	01024	1136*	1249	1361*	1474	1587	1699*	1812*	58′
02′	1812*	1925	2038	2151	2264	2377	2490	2603	2716	2829*	2942*	3056	3169*	56′
04′	3169*	3282*	3396	3509*	3623*	3737	3850*	3964*	4078	4192	4306	4420	4534	54′
06′	4534	4648	4762	4876	4990*	5104*	5219	5333	5447*	5562	5676*	5791	5906	52′
08′	5906	6020*	6135	6250	6365	6479*	6594*	6709*	6824*	6940	7055	7170	7285*	11°50′
78°10′	7285*	7400*	7516	7631*	7747	7862*	7978	8094	8209*	8325	8441	8557	8673	48′
12′	8673	8788*	8904*	9021	9137	9253	9369*	9485*	9602	9718*	9835	9951*	**4,80**068	46′
14′	**4,80**068	0184*	0301	0418	0534*	0651*	0768*	0885	1002	1119*	1236*	1353*	1470*	44′
16′	1470*	1588	1705*	1822*	1940	2057*	2175	2292*	2410*	2528	2646	2763*	2881*	42′
18′	2881*	2999*	3117*	3235*	3353*	3471*	3590	3708	3826*	3945	4063	4181*	4300	11°40′
78°20′	4300	4419	4537*	4656	4775	4893*	5012*	5131*	5250*	5369*	5488*	5607*	5727	38′

22′	5727	5846	5965*	6085	6204*	6324	6443*	6563	6682*	6802*	6922	7042	7162	36′
24′	7162	7281*	7401*	7521*	7642	7762	7882	8002*	8123	8243	8363*	8484	8604*	34′
26′	8604*	8725*	8846	8967	9087*	9208*	9329*	9450*	9571*	9692*	9813*	9934*	4,90056	32′
28′	4,90056	0177*	0298*	0420	0541*	0663	0784*	0906*	1028	1150	1271*	1393*	1515*	11°30′
78°30′	1515*	1637*	1759*	1881*	2004	2126	2248*	2370*	2493	2615*	2738	2860*	2983*	28′
32′	2983*	3106	3229	3351*	3474*	3597*	3720*	3843*	3966*	4090	4213	4336*	4459*	26′
34′	4459*	4583	4706*	4830	4953*	5077*	5201	5325	5448*	5572*	5696*	5820*	5944*	24′
36′	5944*	6068*	6193	6317	6441*	6565*	6690	6814*	6939	7063*	7188*	7313	7438	22′
38′	7438	7563	7687*	7812*	7937*	8062*	8188	8313	8438*	8563*	8689	8814*	8940	11°20′
78°40′	8940	9065*	9191	9317	9442*	9568*	9694*	9820*	9946*	0072*	0198*	0324*	5,00451	18′
42′	5,00451	0577	0703*	0830	0956*	1083	1209*	1336*	1463	1590	1716*	1843*	1970*	16′
44′	1970*	2097*	2224*	2352	2479	2606*	2733*	2861	2988*	3116	3243*	3371*	3499	14′
46′	3499	3627	3754*	3882*	4010*	4138*	4267	4395	4523	4651*	4780	4908	5036*	12′
48′	5036*	5165	5294	5422*	5551	5680	5809	5937*	6066*	6196	6325	6454	6583*	11°10′
78°50′	6583*	6712*	6842	6971*	7101	7230*	7360	7489*	7619*	7749	7879	8009	8139	08′
52′	8139	8269	8399	8529*	8659*	8790	8920*	9051	9181*	9312	9442*	9573	9704	06′
54′	9704	9835	9965*	0096*	0227*	0359	0490	0621	0752*	0884	1015*	1147	5,11278*	04′
56′	5,11278*	1410	1541*	1673*	1805	1937	2069	2201	2333	2465	2597*	2729*	2862	02′
58′	2862	2994*	3127	3259*	3392	3524*	3657*	3790	3923	4056	4189	4322	4455	11°
79°	4455	4588*	4721*	4855	4988*	5122	5255*	5389	5522*	5656*	5790	5924	6058	58′
02′	6058	6192	6326	6460	6594*	6728*	6863	6997*	7131*	7266*	7401	7535*	7670*	56′
04′	7670*	7805	7940	8075	8210	8345	8480	8615*	8750*	8886	9021*	9157	9292*	54′
06′	9292*	9428	9563*	9699*	9835*	9971	0107	0243	0379*	0515*	0651*	0788	5,20924*	52′
08′	5,20924*	1061	1197*	1334	1470*	1607	1744	1881	2018	2155	2292	2429	2566	10°50′
79°10′	2566	2703*	2841	2978	3115*	3253*	3391	3528*	3666*	3804	3942	4080	4218	48′
	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
	Котангенсы													

Продолжение табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
12′	4218	4356	4494*	4632*	4771	4909*	5048	5186*	5325	5463*	5602*	5741	5880	**46′**
14′	5880	6019	6158	6297	6436*	6575*	6715	6854*	6994	7133*	7273	7412*	7552*	**44′**
16′	7552*	7692	7832	7972	8112	8252	8392*	8532*	8673	8813	8953*	9094	9235	**42′**
18′	9235	9375*	9516	9657	9798	9939	0080	0221	0362	0503*	0645	0786	**5,30927***	**10°40′**
79°20′	**5,30927***	1069	1211	1352*	1494*	1636	1778	1920	2062	2204	2346*	2488*	2631	**38′**
22′	2631	2773*	2916	3058*	3201	3344	3486*	3629*	3772*	3915*	4058*	4202	4345	**36′**
24′	4345	4488*	4631*	4775	4918*	5062*	5206	5350	5493*	5637*	5781*	5925*	6069*	**34′**
26′	6069*	6214	6358	6502*	6647	6791*	6936	7080*	7225*	7370	7515	7660	7805	**32′**
28′	7805	7950	8095*	8240*	8386	8531*	8677	8822*	8968	9114	9259*	9405*	9551*	**10°30′**
79°30′	9551*	9697*	9843*	9990	0136	0282*	0429	0575	0722	0868*	1015	1162	**5,41309**	**28′**
32′	**5,41309**	1456	1603	1750	1897	2044*	2191*	2339	2486*	2634	2781*	2929*	3077	**26′**
34′	3077	3225	3373	3521	3669	3817*	3965*	4114	4262*	4411	4559*	4708	4857	**24′**
36′	4857	5005*	5154*	5303*	5452*	5602	5751	5900*	6049*	6199	6348*	6498	6648	**22′**
38′	6648	6797*	6947*	7097*	7247*	7397*	7547*	7698	7848	7998*	8149	8299*	8450*	**10°20′**
79°40′	8450*	8601	8752	8902*	9053*	9204*	9356	9507	9658*	9809*	9961	0112*	**5,50264**	**18′**
42′	**5,50264**	0416	0567*	0719*	0871*	1023*	1175*	1327*	1480	1632*	1784*	1937	2090	**16′**
44′	2090	2242*	2395	2548	2701	2854	3007	3160	3313*	3466*	3620	3773*	3927	**14′**
46′	3927	4081	4234*	4388*	4542	4696	4850*	5004*	5158*	5313	5467*	5622	5776*	**12′**
48′	5776*	5931	6086	6240*	6395*	6550*	6705*	6860*	7016	7171	7326*	7482	7637*	**10°10′**
79°50′	7637*	7793*	7949	8105	8260*	8416*	8573	8729	8885	9041*	9198	9354*	9511	**08′**
52′	9511	9667*	9824*	9981	0138	0295	0452	0609*	0766*	0924	1081*	1239	**5,61396***	**06′**
54′	**5,61396***	1554	1712	1870	2028	2186	2344	2502	2660*	2819	2977*	3136	3294*	**04′**

	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
56′	3294*	3453	3612	3771	3930	4089	4248	4407*	4566*	4726	4885*	5045	5205	02′
58′	5205	5364*	5524*	5684*	5844*	6004*	6165	6325	6485*	6646	6806*	6967	7128	10°
80°	7128	7289	7449*	7610*	7772	7933	8094	8255*	8417	8578*	8740	8902	9063*	58′
02′	9063*	9225*	9387*	9549*	9712	9874	0036*	0199	0361*	0524	0686*	0849*	5,71012*	56′
04′	5,71012*	1175*	1338*	1501*	1664*	1828	1991*	2155	2318*	2482*	2646	2810	2974	54′
06′	2974	3138	3302	3466*	3630*	3795	3959*	4124	4289	4453*	4618*	4783*	4948*	52′
08′	4948*	5114	5279	5444*	5610	5775*	5941	6106*	6272*	6438*	6604*	6770*	6936*	9°50′
80°10′	6936*	7103	7269*	7435*	7602*	7769	7935*	8102*	8269*	8436*	8603*	8770*	8938	48′
12′	8938	9105*	9273	9440*	9608	9776	9944	0111*	0280	0448	0616	0784*	5,80953	46′
14′	5,80953	1121*	1290	1459	1627*	1796*	1965*	2134*	2304	2473	2642*	2812	2981*	44′
16′	2981*	3151	3321	3491	3660*	3831	4001	4171	4341*	4512	4682*	4853	5024	42′
18′	5024	5194*	5365*	5536*	5707*	5879	6050*	6221*	6393	6565	6736*	6908*	7080	9°40′
80°20′	7080	7252	7424*	7596*	7768*	7941	8113*	8286	8459	8631*	8804*	8977*	9150*	38′
22′	9150*	9324	9497	9670*	9844	0017*	0191	0365	0539	0712*	0887	1061	5,91235*	36′
24′	5,91235*	1409*	1584	1758*	1933*	2108	2283	2458	2633	2808	2983*	3159	3334*	34′
26′	3334*	3510	3685*	3861*	4037	4213	4389*	4565*	4741*	4918	5094*	5271	5448	32′
28′	5448	5624*	5801*	5978*	6155*	6333	6510	6687*	6865	7042*	7220*	7398*	7576	9°30′
80°30′	7576	7754	7932*	8110*	8289	8467*	8646	8824*	9003*	9182	9361	9540	9719*	28′
32′	9719*	9898*	0078	0257*	0437	0616*	0796*	0976*	1156*	1336*	1516*	1697	6,01877*	26′
34′	6,01877*	2058	2238*	2419*	2600	2781	2962	3143*	3324*	3506	3687*	3869	4051*	24′
36′	4051	4232*	4414*	4596*	4778*	4961	5143	5325*	5508	5691	5873*	6056*	6239	22′
38′	6239*	6422*	6605*	6789	6972*	7156	7339*	7523*	7707	7891	8075	8259*	8443*	9°20′
80°40′	8443*	8628	8812*	8997	9181*	9366*	9551*	9736*	9921*	0107	0292*	0478	6,10663*	18′
42′	6,10663*	0849	01035	1221	1407	1593	1779	1965*	2152	2338*	2525*	2712	2899	16′
	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
	Котангенсы													

Продолжение табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	**10″**	**20″**	**30″**	**40″**	**50″**	**60″**	**10″**	**20″**	**30″**	**40″**	**50″**	**60″**	
44′	2899	3086	3273	3460*	3647*	3835	4023	4210*	4398*	4586	4774	4962*	5150*	**14′**
46′	5150*	5339	5527*	5716	5904*	6093*	6282*	6471*	6660*	6850	7039*	7229	7418*	**12′**
48′	7418*	7608	7798	7988	8178	8368	8558*	8749	8939*	9130	9320*	9511*	9702*	**9°10′**
80°50′	9702*	9893*	0085	0276	0467*	0659	0851	1042*	1234*	1426*	1618*	1811	**6,22**003	**08′**
52′	**6,22**003	2195*	2388*	2581	2774	2967	3160	3353	3546*	3739*	3933	4127	4320*	**06′**
54′	4320*	4514*	4708*	4902*	5097	5291	5485*	5680	5875	6069*	6264*	6459*	6655	**04′**
56′	6655*	6850	7045*	7241	7437	7632*	7828*	8024*	8220*	8417	8613	8809*	9006*	**02′**
58′	9006*	9203	9400	9597	9794	9991	0188*	0386	0583*	0781	0979	1177	**6,31**375	**9°**
81°	**6,31**375	1573	1771*	1970	2168*	2367	2566	2764*	2963*	3163	3362	3561*	3761	**58′**
02′	3761	3960*	4160*	4360*	4560*	4760*	4960*	5161	5361*	5562	5763	5964	6165	**56′**
04′	6165	6366	6567	6768*	6970	7171*	7373*	7575	7777	7979*	8181*	8384	8586*	**54′**
06′	8586*	8789	8991*	9194*	9397*	9600*	9804	0007*	0211	0414*	0618	0822	**6,41**026	**52′**
08′	**6,41**026	1230	1434*	1639	1843*	2048	2253	2457*	2662*	2868	3073	3278*	3484	**8°50′**
81°10′	3484	3689*	3895*	4101*	4307*	4513*	4720	4926*	5133	5339*	5546*	5753*	5960*	**48′**
12′	5960*	6167*	6375	6582*	6790	6998	7205*	7413*	7622	7830	8038*	8247	8455*	**46′**
14′	8455*	8664*	8873	9082*	9291*	9500*	9710	9919*	0129*	0339*	0549	0759*	**6,50**969*	**44′**
16′	**6,50**969*	1180	1390*	1601	1812	2022*	2233*	2445	2656	2867*	3079	3291	3502*	**42′**
18′	3502*	3714*	3926*	4139	4351*	4564	4776*	4989	5202	5415	5628*	5841*	6055	**8°40′**
81°20′	6055	6268*	6482*	6696*	6910*	7124*	7338*	7553	7767*	7982*	8197	8412	8627	**38′**
22′	8627	8842*	9057*	9273	9489	9704*	9920*	0136*	0353	0569	0785*	1002	**6,61**219	**36′**
24′	**6,61**219	1436	1653	1870	2087*	2304*	2522*	2740	2958	3176	3394	3612*	3831	**34′**
26′	3831	4049*	4268	4487	4706	4925	5144	5363*	5583	5803	6022*	6242*	6463	**32′**

28′	6463	6683	6903*	7124	7344*	7565*	7786*	8007*	8229	8450*	8672	8893*	9115*	8°30′
81°30′	9115*	9337*	9559*	9781*	0004	0226*	0449*	0672*	0895	1118*	1341*	1565	**6,71788***	28′
32′	**6,71788***	2012*	2236	2460*	2684*	2908*	3133	3358	3582*	3807*	4032*	4257*	4483	26′
34′	4483	4708*	4934	5160	5385*	5612	5838	6064*	6291	6517*	6744*	6971*	7198*	24′
36′	7198*	7425*	7653	7880*	8108*	8336	8564	8792*	9020*	9249	9477*	9706*	9935*	22′
38′	9935*	0164*	0393*	0623	0852*	1082	1312	1542	1772	2002*	2233	2463*	**6,82694**	8°20′
81°40′	**6,82694**	2925	3156	3387	3618*	3850	4081*	4313*	4545*	4777*	5010	5242*	5475	18′
42′	5475	5707*	5940*	6173*	6406*	6640	6873*	7107	7341	7575	7809	8043*	8278	16′
44′	8278	8512*	8747	8982	9217	9452*	9687*	9923*	0159	0395	0631	0867	**6,91103***	14′
46′	**6,91103***	1340	1576*	1813*	2050	2287*	2524*	2762	2999*	3237*	3475*	3713*	3951*	12′
48′	3951*	4190	4428*	4667*	4906	5145*	5384*	5624	5863*	6103	6343	6583	6823	8°10′
81°50′	6823	7063*	7304	7544*	7785*	8026*	8267*	8509	8750*	8992	9234	9476	9718	08′
52′	9718	9960	0202*	0445*	0688	0931	1174	1417*	1661	1904*	2148*	2392*	**7,02636***	06′
54′	**7,02636***	2880*	3125	3369*	3614*	3859*	4104*	4350	4595*	4841	5086*	5332*	5579	04′
56′	5579	5825	6071*	6318	6565	6812	7059	7306*	7554	7801*	8049*	8297*	8545*	02′
58′	8545*	8794	9042*	9291	9540	9789	0038	0287*	0537	0786*	1036*	1286*	**7,11536***	8°
82°	**7,11536***	1787	2037*	2288*	2539*	2790*	3041*	3293	3544*	3796*	4048*	4300*	4553	58′
02′	4553	4805*	5058	5311	5564	5817	6070*	6324	6577*	6831*	7085*	7339*	7594	56′
04′	7594	7848*	8103*	8358*	8613*	8869	9124*	9380	9636	9892	0148	0404*	**7,20661**	54′
06′	**7,20661**	0917*	1174*	1431*	1689	1946*	2204	2462	2720	2978	3236*	3495	3753*	52′
08′	3753*	4012*	4271*	4531	4790	5050	5309*	5569*	5830	6090	6350*	6611*	6872*	7°50′
82°10′	6872*	7133*	7394*	7656	7918	8179*	8441*	8704	8966	9228*	9491*	9754*	**7,30017***	48′
12′	**7,30017***	0281	0544*	0808	1072	1336	1600	1864*	2129*	2394	2659	2924*	3189*	46′
14′	3189*	3455	3721	3987	4253	4519*	4786	5052*	5319*	5586*	5854	6121*	6389	44′
	60″	**50″**	**40″**	**30″**	**20″**	**10″**	**60″**	**50″**	**40″**	**30″**	**20″**	**10″**	**0″**	
	Котангенсы													

Продолжение табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
16′	6389	6656*	6925	7193	7461*	7730	7999	8268	8537	8806*	9076	9345*	9615*	**42′**
18′	9615*	9886	0156	0426*	0697*	0968*	1239*	1511	1782*	2054	2326	2598	**7,4**2870*	**7°40′**
82°20′	**7,4**2870*	3143	3415*	3688*	3961*	4235	4508*	4782	5056	5330	5604	5878*	6153*	**38′**
22′	6153*	6428	6703*	6978*	7254	7529*	7805*	8081*	8358	8634*	8911	9188	9465	**36′**
24′	9465	9742	0019*	0297*	0575	0853	1131*	1410	1688*	1967*	2246*	2526	**7,5**2805*	**34′**
26′	**7,5**2805*	3085	3365	3645	3925*	4206	4486*	4767*	5049	5330	5611*	5893*	6175*	**32′**
28′	6175*	6457*	6740	7022*	7305*	7588*	7871*	8155	8438*	8722*	9006*	9290*	9575	**7°30′**
82°30′	9575	9860	0144*	0430	0715	1000*	1286*	1572*	1858*	2145	2431*	2718	**7,6**3005	**28′**
32′	**7,6**3005	3292*	3579*	3867*	4155	4443	4731*	5020	5308*	5597*	5886*	6176	6465*	**26′**
34′	6465*	6755*	7045*	7335*	7626	7916*	8207*	8498*	8790	9081*	9373	9665	9957	**24′**
36′	9957	0249*	0542	0835	1128	1421	1714*	2008*	2302	2596*	2890*	3185	**7,7**3480	**22′**
38′	**7,7**3480	3775	4070*	4365*	4661*	4957*	5253*	5550	5846*	6143	6440	6737*	7035	**7°20′**
82°40′	7035	7332*	7630*	7928*	8227	8525*	8824*	9123*	9422*	9722	0022	0321*	**7,8**0622	**18′**
42′	**7,8**0622	922*	1223	1523*	1825	2126	2427*	2729*	3031*	3333*	3636	3939	4241*	**16′**
44′	4241*	4545	4848	5152	5455*	5759*	6064	6368*	6673*	6978*	7283*	7589	7894*	**14′**
46′	7894*	8200*	8506*	8813	9120	9426*	9733*	0041	0348*	0656*	0964*	1272*	**7,9**1581*	**12′**
48′	**7,9**1581*	1890	2199	2508	2817*	3127*	3437*	3747*	4058	4368*	4679*	4990*	5302	**7°10′**
82°50′	5302	5613*	5925*	6237*	6550	6862*	7175*	7488*	7801*	8115	8429	8743	9057*	**08′**
52′	9057*	9372	9686*	0001*	0317	0632*	0948	1264	1580*	1897	2213*	2530*	**8,0**2847*	**06′**
54′	**8,0**2847*	3165	3483	3801	4119	4437*	4756	5075	5394*	5714	6033*	6353*	6673*	**04′**
56′	6673*	6994	7315	7636	7957	8278*	8600	8922	9244*	9567	9889*	0212*	**8,1**0535*	**02′**
58′	**8,1**0535*	0859	1183	1507	1831	2155*	2480*	2805*	3130*	3456*	3782	4108	4434*	**7°**

83°	4434*	4761	5088	5415	5742	6070	6397*	6725*	7054	7382*	7711*	8041	8370	58′
02′	8370	8700	9030	9360	9690*	0021	0352	0683*	1015	1346*	1678*	2011	8,22343*	56′
04′	8,22343*	2676*	3009*	3343	3676*	4010*	4344*	4679	5013*	5348*	5684	6019*	6355	54′
06′	6355	6691*	7027*	7364	7701	8038	8375*	8713	9051	9389*	9728	0066*	8,30405*	52′
08′	8,30405*	0745	1084*	1424*	1764*	2105	2445*	2786*	3127*	3469	3811	4153	4495*	6°50′
83°10′	4495*	4838	5181	5524	5867*	6211	6555	6899*	7244	7589	7934	8279*	8625	48′
12′	8625	8971	9317	9663*	0010*	0357*	0705	1052*	1400*	1748*	2097	2446	8,42795	46′
14′	8,42795	3144*	3494	3844	4194	4544*	4895*	5246*	5598	5949*	6301*	6653*	7006*	44′
16′	7006*	7359	7712	8065*	8419	8773	9127*	9482	9837	0192	0547*	0903	8,51259	42′
18′	8,51259	1615*	1972	2329	2686	3043*	3401*	3759*	4118	4476*	4835*	5195	5554*	6°40′
83°20′	5554*	5914*	6274*	6635	6995*	7357	7718	8080	8442	8804	9166*	9529*	9892*	38′
22′	9892*	0256	0620	0984	1348*	1713	2078	2443*	2809	3175	3541	3907*	8,64274*	36′
24′	8,64274*	4641*	5009	5377	5745	6113*	6482	6851	7220*	7590	7960	8330	8700*	34′
26′	8700*	9071*	9442*	9814	0186	0558	0930*	1303*	1676*	2049*	2423*	2797*	8,73171*	32′
28′	8,73171*	3546*	3921*	4296*	4672	5048	5424*	5801	6178	6555	6932*	7310*	7688*	6°30′
83°30′	7688*	8067	8446	8825	9204*	9584	9964	0344*	0725*	1106*	1488	1869*	8,82251*	28′
32′	8,82251*	2634	3016*	3399*	3783	4167	4551	4935	5320	5705	6090	6476	6862	26′
34′	6862	7248	7635	8022	8409	8797	9185	9573	9962	0351	0740	1130	8,91520	24′
36′	8,91520	1910	2301	2692	3083*	3475	3867	4259*	4652	5045	5438*	5832*	6226*	22′
38′	6226*	6621	7015*	7411	7806	8202	8598	8994*	9391*	9788*	0186	0584	9,00982*	6°20′
83°40′	9,00982*	1381	1780	2179	2579	2979	3379	3780	4181	4582	4984	5386	5788*	18′
42′	5788*	6191	6594*	6998	7401*	7806	8210*	8615*	9020*	9426*	9832*	0238*	9,10645*	16′
44′	9,10645*	1052*	1460	1867*	2276	2684*	3093	3502*	3912	4322	4732*	5143	5554	14′
46′	5554	5965*	6377*	6789*	7202	7615	8028	8441*	8855*	9270	9685	0100	9,20515*	12′
	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
	Котангенсы													

Продолжение табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	**10″**	**20″**	**30″**	**40″**	**50″**	**60″**	**10″**	**20″**	**30″**	**40″**	**50″**	**60″**	
48′	9,20515*	0931	1347*	1764	2181	2598*	3016	3434	3852*	4271*	4690*	5110	5530	**6°10′**
83°50′	5530	5950*	6371	6792	7213*	7635*	8058	8480*	8903*	9326*	9750*	0174*	9,30599	**08′**
52′	9,30599	1024	1449*	1875	2301	2727*	3154*	3581*	4009	4437	4865*	5294	5723*	**06′**
54′	5723*	6153	6583	7013	7444	7875	8306*	8738*	9170*	9603	0036*	0469*	9,40903*	**04′**
56′	9,40903*	1338	1772*	2207*	2643	3079	3515	3951*	4388*	4826	5264	5702*	6141	**02′**
58′	6141	6580	7019*	7459*	7899*	8340	8781	9222*	9664*	0107	0549*	0992*	9,51436	**6°**
84°	9,51436	1880	2324*	2769	3214*	3660	4106	4552*	4999	5446*	5894	6342	6790*	**58′**
02′	6790*	7239*	7688*	8138*	8588*	9039	9490	9941*	0393	0845*	1298	1751	9,62204*	**56′**
04′	9,62204*	2658*	3113	3567*	4023	4478*	4934*	5391	5848	6305	6763	7221	7679*	**54′**
06′	7679*	8139	8598*	9058	9518*	9979*	0440*	0902	1364	1826*	2289*	2753	9,73217	**52′**
08′	9,73217	3681	4146	4611	5076*	5542*	6009	6476	6943*	7411	7879*	8348	8817	**5°50′**
84°10′	8817	9286*	9756*	0227	0698	1169*	1641	2113*	2586	3059	3533	4007	9,84481*	**48′**
12′	9,84481*	4956*	5432	5907*	6384	6860*	7338	7815*	8294	8772*	9251*	9731	9,90211	**46′**
14′	9,90211	0691*	1172*	1653*	2135*	2618	3100*	3584	4067*	4551*	5036*	5521*	6007	**44′**
16′	6007	6493	6979*	7466*	7954	8442	8930*	9419	9908*	0039*	0088*	0137*	10,0187	**42′**
18′	10,0187	0236	0285	0334*	0384	0433	0482*	0532	0581*	0631	0680*	0730*	780	**5°40′**
84°20′	0780	0830	0879*	0929*	0979*	1029*	1079*	1129*	1179*	1229*	1280	1330	1380*	**38′**
22′	1380*	1430*	1481	1531*	1582	1632*	1683	1733*	1784*	1835	1886	1937	1987*	**36′**
24′	1987*	2038*	2089*	2140*	2191*	2243	2294	2345*	2396*	2448	2499*	2550*	2602	**34′**
26′	2602	2654	2705*	2757	2808*	2860*	2912*	2964	3016	3068	3120	3172	3224	**32′**
28′	3224	3276*	3328*	3381	3433	3485*	3538	3590*	3643	3695*	3748*	3801	3853*	**5°30′**
84°30′	3853*	3906*	3959*	4012*	4065	4118*	4171*	4224*	4277*	4331	4384	4437*	4491	**28′**

32′	4491	4544*	4598	4651*	4705	4758*	4812*	4866	4920	4974	5028	5082	5136	26′
34′	5136	5190	5244	5298*	5352*	5407	5461*	5515*	5570	5624*	5679*	5734	5788*	24′
36′	5788*	5843*	5898*	5953	6008	6063	6118	6173*	6228*	6283*	6339	6394*	6449*	22′
38′	6449*	6505	6560*	6616	6672	6727*	6783	6839	6895	6951	7007	7063	7119	5°20′
84°40′	7119	7175	7231	7287*	7344	7400	7456*	7513	7569*	7626*	7683	7739*	7796*	18′
42′	7796*	7853*	7910	7967	8024	8081*	8138*	8195*	8253	8310*	8367*	8425	8482*	16′
44′	8482*	8540	8598	8655*	8713*	8771	8829	8887	8945	9003	9061	9119*	9177*	14′
46′	9177*	9236	9294	9352*	9411	9469*	9528*	9587	9645*	9704*	9763*	9822*	9881*	12′
48′	9881*	9940*	9999*	0058*	0118	0177	0236*	0296	0355*	0415	0474*	0534*	11,0594	5°10′
84°50′	11,0594	0654	0714	0773*	0833*	0894	0954	1014	1074*	1134*	1195	1255*	1316	08′
52′	1316	1376*	1437*	1498	1559	1619*	1680*	1741*	1802*	1864	1925	1986	2047*	06′
54′	2047*	2109	2170*	2232	2293*	2355	2417	2478*	2540*	2602*	2664*	2726*	2788*	04′
56′	2788*	2851	2913	2975*	3038	3100*	3163	3225*	3288	3351	3413*	3476*	3539*	02′
58′	3539*	3602*	3665*	3728*	3792	3855	3918*	3982	4045*	4109	4173	4236*	4300*	5°
85°	4300*	4364	4428	4492	4556	4620*	4684*	4749	4813	4877*	4942	5006*	5071*	58′
02′	5071*	5136	5201	5265*	5330*	5395*	5460*	5526	5591	5656*	5721*	5787	5852*	56′
04′	5852*	5918*	5984	6049*	6115*	6181*	6247*	6313*	6379*	6445*	6512	6578*	6644*	54′
06′	6644*	6711	6778	6844*	6911	6978	7045	7111*	7178*	7246	7313	7380	7447*	52′
08′	7447*	7515	7582*	7650	7717*	7785*	7853	7921	7989	8057	8125	8193	8261*	4°50′
85°10′	8261*	8329*	8398	8466*	8535	8604	8672*	8741*	8810*	8879	8948*	9017*	9086*	48′
12′	9086*	9156	9225	9294*	9364	9434	9503*	9573	9643	9713	9783	9853	9923	46′
14′	9923	9993*	0064	0134	0204*	0275*	0346	0416*	0487*	0558*	0629*	0700*	12,0771*	44′
16′	12,0771*	0843	0914	0985*	1057	1128*	1200*	1272	1344	1416	1488	1560	1632	42′
18′	1632	1704*	1776*	1849	1921*	1994	2067	2139*	2212*	2285*	2358*	2431*	2505	4°40′
	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
	Котангенсы													

Продолжение табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
85°20′	2505	2578	2651*	2725	2798*	2872	2946	3019*	3093*	3167*	3241*	3316	3390	**38′**
22′	3390	3464*	3539	3613*	3688	3762*	3837*	3912*	3987*	4062*	4137*	4212*	4288	**36′**
24′	4288	4363*	4439	4514*	4590*	4666	4742	4818	4894	4970	5046*	5122*	5199	**34′**
26′	5199	5275*	5352*	5429	5506	5582*	5659*	5737	5814	5891*	5968*	6046	6123*	**32′**
28′	6123*	6201*	6279	6357	6435	6513	6591	6669	6747*	6826	6904*	6983	7062	**4°30′**
85°30′	7062	7140*	7219*	7298*	7377*	7457	7536	7615*	7695	7774*	7854	7934	8014	**28′**
32′	8014	8094	8174	8254	8334*	8415	8495*	8576	8656*	8737*	8818*	8899	8980*	**26′**
34′	8980*	9061*	9143	9224	9305*	9387*	9469	9551	9632*	9714*	9797	9879	9961*	**24′**
36′	9961*	0044	0126*	0209	0291*	0374*	0457*	0540*	0623*	0707	0790*	0873*	**13**,0957*	**22′**
38′	**13**,0957*	1041	1125	1208*	1292*	1377	1461	1545*	1630	1714*	1799	1883*	1968*	**4°20′**
85°40′	1968*	2053*	2138*	2224	2309	2394*	2480	2565*	2651*	2737*	2823	2909*	2995*	**18′**
42′	2995*	3082	3168	3254*	3341*	3428	3515	3602	3689	3776	3863*	3951	4038*	**16′**
44′	4038*	4126	4214	4301*	4389*	4478	4566	4654*	4743	4831*	4920	5009	5097*	**14′**
46′	5097*	5187	5276	5365	5454*	5544	5633*	5723*	5813	5903	5993*	6083*	6174	**12′**
48′	6174	6264*	6355	6445*	6536*	6627*	6718*	6809*	6901	6992	7083*	7175*	7267	**4°10′**
85°50′	7267	7359	7451	7543	7635*	7728	7820*	7913	8005*	8098*	8191*	8285	8378	**08′**
52′	8378	8471*	8565	8658*	8752*	8846	8940	9034*	9128*	9223	9317*	9412	9507	**06′**
54′	9507	9602	9697	9792	9887*	9983	0078*	0174	0270	0365*	0462	0558	**14**,0654*	**04′**
56′	**14**,0654*	0751	0847*	0944	1041	1138	1235	1332*	1430	1527*	1625	1722*	1820*	**02′**
58′	1820*	1918*	2017	2115*	2213*	2312*	2411	2510	2609	2708	2807*	2907	3006*	**4°**
86°	3006*	3106	3206	3306	3406	3506*	3606*	3707	3808	3908*	4009*	4111	4212	**58′**
02′	4212	4313*	4415	4516*	4618*	4720*	4822*	4924*	5027	5129*	5232*	5335	5438	**56′**

	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
04′	5438	5541	5644*	5748	5851*	5955	6059	6163	6267	6371*	6475*	6580*	6685	54′
06′	6685	6790	6895	7000	7105*	7211	7316*	7422*	7528	7634*	7740*	7847	7953*	52′
08′	7953*	8060	8167	8274	8381	8488*	8596	8703*	8811*	8919	9027*	9135*	9244	3°50′
86°10′	9244	9352*	9461	9570	9679	9788	9897*	0007	0116*	0226*	0336*	0446*	15,0557	48′
12′	15,0557	0667*	0778	0889	1000	1111	1222	1333*	1445	1557	1669	1781	1893	46′
14′	1893	2005*	2118	2231	2344	2457	2570*	2683*	2797*	2911	3025	3139	3253*	44′
16′	3253*	3368	3482*	3597	3712	3827	3942*	4058	4173*	4289*	4405*	4521*	4638	42′
18′	4638	4754*	4871	4988	5105	5222	5339*	5457	5575	5693	5811	5929	6047*	3°40′
86°20′	6047*	6166	6285	6404	6523	6642*	6762	6882	7001*	7122	7242	7362*	7483	38′
22′	7483	7604	7725	7846	7967*	8089	8211	8332*	8455	8577	8699*	8822*	8945	36′
24′	8945	9068*	9191*	9315	9438*	9562*	9686*	9810*	9935	0059*	0184*	0309*	16,0434*	34′
26′	16,0434*	0560	0685*	0811*	0937	1063*	1189*	1316*	1443	1570	1697	1824*	1952	32′
28′	1952	2079*	2207*	2336	2464	2592*	2721*	2850*	2979*	3109	3238*	3368*	3498*	3°30′
86°30′	3498*	3628*	3759	3889*	4020*	4151*	4282*	4414	4545*	4677*	4809*	4942	5074*	28′
32′	5074*	5207	5340	5473	5606*	5740	5873*	6007*	6142	6276*	6411	6546	6681	26′
34′	6681	6816	6951*	7087*	7223*	7359*	7496	7632*	7769*	7906*	8043*	8181	8319	24′
36′	8319	8457	8595	8733*	8872	9011	9150	9289*	9429	9568*	9708*	9849	9989*	22′
38′	9989	0130	0271	0412	0553*	0695	0837	0979	1121*	1264	1407	1550	17,1693	3°20′
86°40′	17,1693	1836*	1980*	2124*	2268*	2413	2558	2703	2848	2993*	3139	3285	3431*	18′
42′	3431*	3577*	3724*	3871*	4018*	4166	4313*	4461*	4609*	4758	4907	5055*	5205	16′
44′	5205	5354*	5504	5654	5804	5954*	6105*	6256*	6407*	6559	6711	6863	7015	14′
46′	7015	7167*	7320*	7473*	7626*	7780*	7934	8088*	8242*	8397*	8552	8707*	8863	12′
48′	8863	9018*	9174*	9331	9487*	9644	9801*	9958*	0116	0274	0432*	0591	18,0749*	3°10′
86°50′	18,0749*	0908*	1068	1227*	1387*	1547*	1708	1868*	2029*	2191	2352*	2514	2676*	08′
52′	2676*	2838*	3001*	3164*	3327*	3491*	3655	3819*	3983*	4148*	4313*	4479	4644*	06′
	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
	Котангенсы													

Окончание табл. IX.5 (часть вторая)

	Тангенсы													
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
54′	4644*	4810*	4976*	5143	5310	5477	5644*	5812	5980	6148*	6317	6486	6655*	04′
56′	6655*	6825	6995	7165	7335*	7506	7677*	7848*	8020*	8192*	8365	8537*	8710*	02′
58′	8710*	8883*	9057*	9231*	9405*	9580	9755	9930	0105*	0281*	0458	0634*	**19**,0811	3°
87°	**19**,0811	0988*	1166	1343*	1521*	1700	1879	2058	2237*	2417*	2597*	2778	2959	58′
02′	2959	3140	3321*	3503*	3685*	3868	4051	4234*	4418	4602	4786	4970*	5155*	56′
04′	5155*	5341	5526*	5712*	5899	6085*	6272*	6460	6648	6836	7024*	7213*	7402*	54′
06′	7402*	7592	7782	7972*	8163	8354	8545*	8737*	8929*	9122	9315	9508*	9702	52′
08′	9702	9896	0090*	0285	0480*	0676	0871*	1068	1264*	1462	1659	1857	**20**,2055*	2°50′
87°10′	**20**,2055*	2254	2453	2652*	2852	3052*	3253	3454	3655	3857	4059	4261*	4464*	48′
12′	4464*	4668	4871*	5076	5280*	5485*	5691	5896*	6103	6309*	6516*	6724	6932	46′
14′	6932	7140	7349	7558	7767*	7977*	8188	8399	8610	8822	9034	9246*	9459*	44′
16′	9459*	9673	9886*	0101	0315*	0531	0746*	0962*	1179	1396	1613	1831	**21**,2049	42′
18′	**21**,2049	2268	2487	2706*	2927	3147*	3368*	3589*	3811*	4034	4256*	4480	4704	2°40′
87°20′	4704	4928	5152*	5378	5603*	5829*	6056	6283	6510*	6738*	6967	7196	7425*	38′
22′	7425*	7655*	7886	8116*	8348	8580	8812*	9045	9278*	9512*	9746*	9981*	**22**,0217	36′
24′	**22**,0217	0452*	0689	0926	1163*	1401	1639*	1878*	2118	2358	2598*	2839	3080*	34′
26′	3080*	3322*	3565*	3808*	4052	4296	4540*	4786	5031*	5278	5524*	5772	6020	32′
28′	6020	6268*	6517*	6767	7017	7267*	7518*	7770*	8022*	8275*	8529	8783	9037*	2°30′
87°30′	9037*	9292*	9548	9804*	0061	0318*	0576*	0835	1094	1354	1614	1875	**23**,2136*	28′
32′	**23**,2136*	2398*	2661	2924*	3188	3452*	3717*	3983	4249*	4516	4783*	5051*	5320*	26′
34′	5320*	5589*	5859*	6130	6401	6673	6945	7218	7491*	7766	8041	8316*	8592*	24′
36′	8592*	8869*	9146*	9425	9703*	9983	0263	0543*	0825	1107	1389*	1673	**24**,1957	22′
38′	**24**,1957	2241*	2527	2813	3099*	3387	3675	3963*	4253	4543	4833*	5125	5417*	2°20′

87°40′	5417*	5710	6003*	6298	6593	6888*	7185	7482	7779*	8078	8377*	8677*	8978	18′
42′	8978	9279*	9581*	9884*	0188	0492*	0797*	1103	1409*	1717	2025	2334	25,2643*	16′
44′	25,2643*	2953*	3265	3576*	3889	4202*	4516*	4831*	5147*	5464	5781	6099	6418	14′
46′	6418	6737*	7058	7379*	7701*	8024*	8348	8672*	8997*	9324	9651	9978*	26,0307	12′
48′	26,0307	0636*	0967	1298	1630	1962*	2296	2630*	2966	3302	3639	3977	4315*	2°10′
87°50′	4315*	4655*	4996	5337	5679*	6022*	6366*	6711*	7057*	7404	7751*	8100	8449*	08′
52′	8449*	8800	9151	9503*	9856*	0210*	0565*	0921	1278	1635*	1994*	2354	27,2714*	06′
54′	27,2714*	3076	3438*	3802	4166*	4532	4898*	5265*	5634	6003*	6373*	6745	7117	04′
56′	7117	7490*	7864*	8240	8616*	8993*	9372	9751*	0132	0513*	0896	1279*	28,1664	02′
58′	28,1664	2049*	2436*	2824	3213	3603	3993*	4386	4779	5173	5568*	5965	6362*	2°
88°	6362*	6761	7160*	7561*	7963*	8366*	8770*	9176	9582*	9990	0399	0808*	29,1220	58′
02′	29,1220	1632	2045*	2460	2876	3292*	3711	4130	4550*	4972*	5395*	5819*	6244*	56′
04′	6244*	6671*	7099	7528	7958*	8390	8822*	9257	9692	0128*	0566*	1005*	30,1446	54′
06′	30,1446	1887*	2330*	2775	3220*	3667*	4115*	4565	5016	5468	5921*	6376*	6833	52′
08′	6833	7290*	7749*	8209*	8671*	9134*	9599	0065	0532	1001	1471	1942*	31,2415*	1°50′
88°10′	31,2415*	2890	3366	3843	4322	4802	5283*	5767	6251*	6737*	7225	7714*	8205	48′
12′	8205	8697	9190*	9686	0182*	0681	1180*	1682	2185	2689*	3195*	3703*	32,4212*	46′
14′	32,4212*	4723*	5236	5750	6266	6783*	7302*	7823	8345*	8869*	9395	9922*	33,0451*	44′
16′	33,0451*	0982	1514*	2049	2584*	3122*	3661*	4203	4745*	5290*	5836*	6385	6935	42′
18′	6935	7486*	8040	8595*	9153	9712	0273	0835*	1400	1966*	2535	3105*	34,3677*	1°40′
88°20′	34,3677*	4251*	4827*	5405*	5985*	6567	7151	7736*	8324*	8914	9506	0099*	35,0695	38′
22′	35,0695	1293	1893	2494*	3098*	3704*	4312*	4922*	5535	6149*	6766	7384*	8005*	36′
24′	8005*	8628	9253*	9880*	0510	1142	1775*	2412	3050	3691	4333*	4979	36,5626*	34′
26′	36,5626*	6276	6928	7582*	8239*	8898*	9560	0223*	0890	1558*	2229*	2903	37,3578*	32′
28′	37,3578*	4257	4938	5621	6307	6995	7686	8379	9075	9773*	0474*	1178	38,1884*	1°30′
88°30′	38,1884*													
	60″	50″	40″	30″	20″	10″	60″	50″	40″	30″	20″	10″	0″	
	Котангенсы													

Таблица IX.5 (часть третья)

	Тангенсы							
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
88° 30′	38,1884*	38,2593	38,3304*	38,4018*	38,4735*	38,5455	38,6177	**29′**
31′	38,6177	38,6902	38,7629*	38,8360	38,9093	38,9829	39,0567*	**28′**
32′	39,0567*	39,1309	39,2053	39,2800	39,3550	39,4303	39,5058*	**27′**
33′	39,5058*	39,5817*	39,6579	39,7343	39,8110*	39,8881	39,9654*	**26′**
34′	39,9654*	40,0430*	40,1210	40,1992*	40,2778	40,3566*	40,4358	**1° 25′**
88° 35′	40,4358	40,5153	40,5950*	40,6752	40,7556	40,8363*	40,9174	**24′**
36′	40,9174	40,9987*	41,0804*	41,1625	41,2448*	41,3275*	41,4105*	**23′**
37′	41,4105*	41,4939	41,5776	41,6616*	41,7460	41,8307	41,9157*	**22′**
38′	41,9157*	42,0011*	42,0869	42,1730	42,2594*	42,3462*	42,4334*	**21′**
39′	42,4334*	42,5209*	42,6088*	42,6971	42,7857	42,8747	42,9640*	**1° 20′**
88° 40′	42,9640*	43,0538	43,1439	43,2343*	43,3252	43,4164*	43,5081	**19′**
41′	43,5081	43,6001	43,6925	43,7853	43,8785	43,9721	44,0661	**18′**
42′	44,0661	44,1605	44,2553	44,3505	44,4461	44,5421*	44,6385*	**17′**
43′	44,6385*	44,7354*	44,8327	44,9304	45,0285*	45,1271	45,2261	**16′**
44′	45,2261	45,3255*	45,4254	45,5257	45,6265	45,7277	45,8293*	**1° 15′**
88° 45′	45,8293*	45,9314*	46,0340	46,1370	46,2405	46,3444*	46,4488*	**14′**
46′	46,4488*	46,5537	46,6591	46,7649	46,8712*	46,9780*	47,0853	**13′**
47′	47,0853	47,1931	47,3013*	47,4101*	47,5194	47,6292	47,7395	**12′**
48′	47,7395	47,8502*	47,9616	48,0734	48,1857*	48,2986*	48,4120*	**11′**
49′	48,4120*	48,5260	48,6405	48,7555	48,8710*	48,9872	49,1038*	**1° 10′**
88° 50′	49,1038*	49,2211	49,3388*	49,4572	49,5761*	49,6956*	49,8157	**09′**
51′	49,8157	49,9363*	50,0576	50,1794	50,3018*	50,4248*	50,5485	**08′**
52′	50,5485	50,6727	50,7975*	50,9230	51,0491	51,1758	51,3031*	**07′**
53′	51,3031*	51,4311	51,5597	51,6889*	51,8188*	51,9494*	52,0806*	**06′**

54′	52,0806*	52,2125*	52,3451	52,4783	52,6122	52,7468	52,8821	1° 5′
88° 55′	52,8821	53,0180*	53,1547*	53,2921	53,4302	53,5690*	53,7085*	04′
56′	53,7085*	53,8488*	53,9898	54,1315*	54,2740*	54,4173	54,5613	03′
57′	54,5613	54,7060*	54,8515*	54,9978*	55,1449*	55,2928	55,4415	02′
58′	55,4415	55,5909*	55,7412*	55,8923*	56,0442*	56,1970	56,3505*	01′
59′	56,3505*	56,5050	56,6602*	56,8163*	56,9733*	57,1312	57,2899*	1°
89°	57,2899*	57,4495*	57,6100*	57,7714*	57,9337*	58,0970	58,2611*	59′
01′	58,2611*	58,4262*	58,5922*	58,7592	58,9271	59,0960	59,2658*	58′
02′	59,2658*	59,4366*	59,6085	59,7813	59,9551	60,1299*	60,3058	57′
03′	60,3058	60,4827	60,6606	60,8395*	61,0196	61,2007	61,3829	56′
04′	61,3829	61,5661*	61,7505	61,9360	62,1225*	62,3103	62,4991*	0° 55′
89° 05′	62,4991*	62,6891*	62,8803	63,0726	63,2661	63,4608	63,6567	54′
06′	63,6567	63,8538*	64,0521*	64,2517*	64,4525*	64,6546*	64,8580	53′
07′	64,8580	65,0626	65,2685*	65,4758	65,6843*	65,8942	66,1054*	52′
08′	66,1054*	66,3180*	66,5320	66,7473*	66,9641	67,1822*	67,4018*	51′
09′	67,4018*	67,6228*	67,8453*	68,0692*	68,2947	68,5216	68,7500*	0° 50′
89° 10′	68,7500*	68,9800*	69,2115*	69,4446	69,6792*	69,9155	70,1533	49′
11′	70,1533	70,3928	70,6339	70,8766*	71,1211	71,3672	71,6150*	48′
12′	71,6150*	71,8646	72,1159	72,3690	72,6238*	72,8805	73,1389*	47′
13′	73,1389*	73,3993	73,6614*	73,9255	74,1914*	74,4593*	74,7291*	46′
14′	74,7291*	75,0009	75,2746*	75,5504*	75,8282*	76,1080*	76,3900	0° 45′
89° 15′	76,3900	76,6740	76,9601	77,2484	77,5388*	77,8314*	78,1263	44′
16′	78,1263	78,4234	78,7227*	79,0244	79,3284	79,6347	79,9434	43′
17′	79,9434	80,2545	80,5680*	80,8840	81,2025	81,5235	81,8470	42′
18′	81,8470	82,1731*	82,5018*	82,8332	83,1672*	83,5040	83,8435	41′
19′	83,8435	84,1857*	84,5308	84,8787	85,2294*	85,5831*	85,9397*	0° 40′
89° 20′	85,9397*	86,2994	86,6620	87,0277	87,3965	87,7684*	88,1435*	39′
	60″	**50″**	**40″**	**30″**	**20″**	**10″**	**0″**	
	Котангенсы							

Продолжение табл. IX.5 (часть третья)

	Тангенсы							
	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	
21′	88,1435*	88,5219	88,9034*	89,2883*	89,6766	90,0682*	90,4633	**38′**
22′	90,4633	90,8618*	91,2639*	91,6696	92,0788*	92,4918	92,9084*	**37′**
23′	92,9084*	93,3289	93,7531*	94,1813	94,6133*	95,0493*	95,4894*	**36′**
24′	95,4894*	95,9336	96,3819*	96,8344*	97,2912*	97,7524	98,2179	**0° 35′**
89° 25′	98,2179	98,6879	99,1624	99,6414*	100,125	100,613*	101,106*	**34′**
26′	101,106*	101,604*	102,108	102,616	103,129	103,647	104,170*	**33′**
27′	104,170*	104,699*	105,233*	105,773*	106,318*	106,869*	107,426	**32′**
28′	107,426	107,988*	108,557	109,131*	109,712	110,299	110,892	**31′**
29′	110,892	111,491*	112,097	112,710	113,329	113,955*	114,588*	**0° 30′**
89° 30′	114,588*	115,228*	115,876	116,530*	117,193	117,862*	118,540	**29′**
31′	118,540	119,225	119,918*	120,619*	121,329	122,047	122,773*	**28′**
32′	122,773*	123,509	124,253	125,006	125,768*	126,540	127,321	**27′**
33′	127,321	128,112	128,912*	129,723*	130,544*	131,376	132,218*	**26′**
34′	132,218*	133,071*	133,935*	134,811	135,698	136,596*	137,507	**0° 25′**
89° 35′	137,507	138,430	139,365*	140,313*	141,274*	142,249	143,237	**24′**
36′	143,237	144,238*	145,254*	146,284*	147,329*	148,389*	149,465	**23′**
37′	149,465	150,556	151,663	152,786*	153,926*	155,084	156,259	**22′**
38′	156,259	157,451*	158,663	159,893	161,142	162,411	163,700	**21′**
39′	163,700	165,009*	166,340*	167,692*	169,067*	170,464*	171,885	**0° 20′**
89° 40′	171,885	173,329*	174,798*	176,292*	177,812*	179,358*	180,932	**19′**
41′	180,932	182,533	184,163	185,822	187,511*	189,232	190,984	**18′**
42′	190,984	192,769	194,587*	196,440*	198,329*	200,255	202,218*	**17′**
43′	202,218*	204,220*	206,263	208,346*	210,472*	212,642*	214,857*	**16′**

44′	214,857*	217,119	219,429	221,788*	224,199	226,663	229,181*	**0° 15′**
89° 45′	229,181*	231,756*	234,390	237,084*	239,841	242,663	245,551*	**14′**
46′	245,551*	248,510	251,541	254,646*	257,829*	261,093	264,440*	**13′**
47′	264,440*	267,875	271,399*	275,018*	278,735	282,553	286,477*	**12′**
48′	286,477*	290,512*	294,662*	298,933	303,329	307,856*	312,521	**11′**
49′	312,521	317,329	322,287*	327,403	332,684	338,138	343,773*	**0° 10′**
89° 50′	343,773*	349,600	355,628	361,867	368,329	375,026	381,970*	**09′**
51′	381,970*	389,178	396,662	404,439*	412,528*	420,947*	429,717*	**08′**
52′	429,717*	438,860*	448,401	458,365*	468,782*	479,684*	491,106	**07′**
53′	491,106	503,084	515,661	528,883	542,801*	557,471*	572,957	**06′**
54′	572,957	589,327	606,660*	625,044	644,577	665,369*	687,548*	**0° 5′**
89° 55′	687,548*	711,257	736,659*	763,943	793,325*	825,058*	859,436	**04′**
56′	859,436	896,803	937,566*	982,213	1031,32	1085,60	1145,91*	**03′**
57′	1145,91*	1213,32	1289,15	1375,09*	1473,31*	1586,65	1718,87	**02′**
58′	1718,87	1875,13	2062,64*	2291,83	2578,30*	2946,63*	3437,74*	**01′**
59′	3437,74*	4125,29*	5156,62	6875,49	10313,2	20626,4*		**0°**
	60″	**50″**	**40″**	**30″**	**20″**	**10″**	**0″**	
	Котангенсы							

В **таблице IX.5** содержатся значения тангенсов острых углов α, $0° \leqslant \alpha < 90°$, с шестью значащими цифрами после запятой.

Если требуется найти значение тангенса (котангенса) для углов α вне табличного интервала $0 \leqslant \alpha < 90°$, то следует воспользоваться формулами приведения и периодичностью этих функций:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \\
\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \\
\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{ctg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \\
\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \\
\operatorname{tg}(k \cdot 180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(k \cdot 180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \\
\qquad k \text{ — целое}, & \qquad k \text{ — целое}.
\end{array}$$

Из таблицы IX.5 находят значения и тангенсов, и котангенсов острых углов α, $0° \leqslant \alpha < 90°$, так как $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$. В ней использована двойная нумерация строк и столбцов: для тангенсов — *слева* и *сверху*, для котангенсов — *справа* и *снизу*.

Таблица состоит из трех частей.

В первой части таблицы IX.5 приведены значения тангенсов для аргументов от 0° до 76° с шагом 1′ и поправками на 10″, 20″ и 30″. На этом интервале значения тангенса растут достаточно равномерно. Это позволяет при шаге аргумента, равном 1′, рассчитать промежуточные значения тангенсов (и соответственно котангенсов) для аргументов, кратных 10″, с помощью поправок на 10″, 20″ и 30″. Поправки приведены в трех столбцах, расположенных *справа* от табличных значений, и относятся к их последним значащим цифрам. Если требуется найти значение функции аргумента, содержащего 40″ или 50″, то следует взять табличное значение, соответствующее аргументу, который ближе иных к заданному, и воспользоваться поправкой на 20″ для 40″ и поправкой на 10″ для 50″, учитывая, что тангенс возрастает, а котангенс убывает. Например, для вычисления $\operatorname{tg} 42°12'40''$ берут табличное значение $\operatorname{tg} 42°13'$ и *вычитают* из него поправку на 20″. Чтобы определить $\operatorname{ctg} 42°12'40''$, находят $\operatorname{ctg} 42°13'$ и *прибавляют* к нему поправку на 20″.

Все значащие цифры табличных значений — верные. Если около числа стоит звездочка (*), то при округлении последнюю цифру увеличивают на 1.

Значения для аргумента α, $10° \leqslant \alpha < 45°$, даны с шестью знаками после запятой, а значения аргумента α, $45° \leqslant \alpha \leqslant 76°$, даны с пятью знаками после запятой, так как цифра единиц становится значащей.

В столбцах приведены лишь последние четыре из шести значащих цифр. Табличные значения, для которых первые две значащие цифры одинаковы, печатаются на одинаковом фоне — поочередно белом и сером. Одинаковы либо первые две цифры после запятой для углов, меньших 45°, либо первые две значащие цифры (целые и десятые) для углов, больших 45°. Значение тангенса полностью дано в каждой группе чисел дважды — по одному разу в первом и втором столбцах. При этом первые две значащие цифры набраны жирным шрифтом. Остальные табличные значения содержат только четыре значащие цифры. Недостающие первые цифры к ним нужно приписать.

Пример 16. Найти tg 0°6′40″.

Находим табличное значение из первой строки таблицы в столбце для 7′ и вычитаем поправку на 20″, т.е.

$$\operatorname{tg} 0°6'40'' = \operatorname{tg} 0°7' - (\text{поправка на } 20'') = 0{,}002036 - 0{,}000097 = \\ = 0{,}001939.$$

Пример 17. Найти ctg 76°12′40″.

Находим табличное значение для 76°13′ (строка с номером 76°10′ *справа* и столбец с номером 3′ *снизу*): 0,245315. Поправку на 20″ прибавляем, так как котангенс убывает:

$$\operatorname{ctg} 76°12'40'' = \operatorname{ctg} 76°13' + (\text{поправка на } 20'') = 0{,}226889 + 0{,}000102 = \\ = 0{,}226991.$$

Во второй и третьей частях таблицы IX.5 поправок нет, так как значения тангенса, близкие к 90°, меняются очень быстро. Шаг в этих частях таблицы равен 10″.

Во **второй части** таблицы IX.5 содержатся значения тангенсов углов от 76° до 88°30′ (соответственно значения котангенсов для углов от 1°30′ до 14°). При этом заголовки строк даны с шагом 2′, а заголовки столбцов соответствуют десяткам секунд от 0″ до 120″ с шагом 10″. Табличные значения располагаются в 13 столбцах, причем средний столбец 60″ отделен от других вертикальными линиями — он соответствует нечетным минутам.

Пример 18. Найти ctg 8°12′20″.

На пересечении строки, озаглавленной *справа* 8°12′, и столбца, *под* которым стоит 20″ (ближайшего к правому краю), находим число 3475* (на сером фоне), или после округления: 3476. Первые две значащие цифры для этой группы чисел есть **6,9.** Таким образом, ctg 8°12′20″ = 6,93476.

Третья часть таблицы IX.5 содержит значения тангенсов для углов между 88°30′ и 89°59′50″ (значения котангенсов для углов от 0°0′10″ до 1°30′).

Таблица IX.6

ВАЖНЫЕ КОНСТАНТЫ

n	n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	n^2	$\lg n$
π	3,14159265358980	0,318309886183791	1,77245385090552	9,86960440108936	0,497149872694134
e	2,71828182845905	0,367879441171443	1,64872127070013	7,38905609893065	0,434294481903252
$\lg e$	0,434294481903252	2,30258509299405	0,659010228982261	0,188611697011614	−0,362215688699464
$\lg 2$	0,301029995663982	3,32192809488737	0,548662004939272	0,090619058289457	−0,521390227654325
$\frac{\pi}{180}$	0,017453292519943	57,2957795130824	0,132110909920201	$3,04617419786709 \cdot 10^{-4}$	−1,75812263240918

n	$2n$	$\frac{n}{2}$	$\sqrt[3]{n}$	n^3	$\ln n$
π	6,28318530717959	1,57079632679490	1,46459188756153	31,0062766802999	1,14472988584941
e	5,43656365691810	1,35914091422953	1,39561242508609	20,0855369231877	1,00000000000001
$\lg e$	0,868588963806504	0,217147240951626	0,757288631330908	0,081913019234552	−0,834032445247956
$\lg 2$	0,602059991327963	0,150514997831991	0,670198200561696	0,027279054723949	−1,20054536582963
$\frac{\pi}{180}$	0,034906585039887	0,008726646259972	0,259393519945432	$5,31657693420779 \cdot 10^{-6}$	−4,04822696504082

n	$3n$	$n/3$	$2/(3n)$	$3/(4n)$	$\log_2 n$
π	9,42477796076938	1,047197551196600	2,09439510239320	2,35619449019235	1,651496129472320
e	8,15484548537714	0,906093942819682	1,81218788563937	2,03871137134429	1,442695040888960
$\lg e$	1,30288344570976	0,144764827301084	0,289529654602168	0,325720861427439	-1,203254472699720
$\lg 2$	0,903089986991944	0,100343331887994	0,200686663775988	0,225772496747986	-1,732020845644620
$\pi/180$	0,052359877559830	0,005817764173314	0,011635528346629	0,013089969389958	-5,840356966857360
n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$3\sqrt{n}/2$	$2\sqrt{n}/3$	$\sqrt{n}/2$
2	1,41421356237310	1,25992104989488	2,12132034355965	0,942809041582064	0,707106781186548
3	1,73205080756888	1,44224957030741	2,59807621135332	1,15470053837926	0,866025403784439
5	2,23606797749979	1,70997594667670	3,35410196624969	1,49071198499986	1,11803398874990
10	3,16227766016838	2,15443469003189	4,74341649025257	2,10818510677892	1,58113883008419
n	$2\sqrt{n}/3$	$\lg n$	$\ln n$	$\log_2 n$	
2	0,471404520791032	0,301029995663982	0,693147180559946	1,00000000000001	
3	0,577350269189626	0,477121254719663	1,09861228866811	1,58496250072116	
5	0,745355992499930	0,698970004336019	1,60943791243411	2,32192809488737	
10	1,05409255338946	1,00000000000001	2,30258509299405	3,32192809488737	

Таблица IX.7

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ДО 2803

1	179	421	677	971	1259	1559	1873	2203	2521
2	181	431	683	977	1277	1567	1877	2207	2531
3	191	433	691	983	1279	1571	1879	2213	2539
5	193	439	701	991	1283	1579	1889	2221	2543
7	197	443	709	997	1289	1583	1901	2237	2549
11	199	449	719	1009	1291	1597	1907	2239	2551
13	211	457	727	1013	1297	1601	1913	2243	2557
17	223	461	733	1019	1301	1607	1931	2251	2579
19	227	463	739	1021	1303	1609	1933	2267	2591
23	229	467	743	1031	1307	1613	1949	2269	2593
29	233	479	751	1033	1319	1619	1951	2273	2609
31	239	487	757	1039	1321	1621	1973	2281	2617
37	241	491	761	1049	1327	1627	1979	2287	2621
41	251	499	769	1051	1361	1637	1987	2293	2633
43	257	503	773	1061	1367	1657	1993	2297	2647
47	263	509	787	1063	1373	1663	1997	2309	2657
53	269	521	797	1069	1381	1667	1999	2311	2659
59	271	523	809	1087	1399	1669	2003	2333	2663
61	277	541	811	1091	1409	1693	2011	2339	2671
67	281	547	821	1093	1423	1697	2017	2341	2677
71	283	557	823	1097	1427	1699	2027	2347	2683
73	293	563	827	1103	1429	1709	2029	2351	2687
79	307	569	829	1109	1433	1721	2039	2357	2689
83	311	571	839	1117	1439	1723	2053	2371	2693
89	313	577	853	1123	1447	1733	2063	2377	2699
97	317	587	857	1129	1451	1741	2069	2381	2707
101	331	593	859	1151	1453	1747	2081	2383	2711
103	337	599	863	1153	1459	1753	2083	2389	2713
107	347	601	877	1163	1471	1759	2087	2393	2719
109	349	607	881	1171	1481	1777	2089	2399	2729
113	353	613	883	1181	1483	1783	2099	2411	2731
127	359	617	887	1187	1487	1787	2111	2417	2741
131	367	619	907	1193	1489	1789	2113	2423	2749
137	373	631	911	1201	1493	1801	2129	2437	2753
139	379	641	919	1213	1499	1811	2131	2441	2767
149	383	643	929	1217	1511	1823	2137	2447	2777
151	389	647	937	1223	1523	1831	2141	2459	2789
157	397	653	941	1229	1531	1847	2143	2467	2791
163	401	659	947	1231	1543	1861	2153	2473	2797
167	409	661	953	1237	1549	1867	2161	2477	2801
173	419	673	967	1249	1553	1871	2179	2503	2803

Приложение

МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР

Меры длины

	мк	мм	см	дм	м	км	Наименование
мк	1	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	микрон
мм	1000	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	миллиметр
см	10^4	10	1	0,1	0,01	10^{-5}	сантиметр
дм	10^5	100	10	1	0,1	10^{-4}	дециметр
м	10^6	1000	100	10	1	0,001	метр
км	10^9	10^6	10^5	10^4	1000	1	километр

Меры площади

	мм^2	см^2	дм^2	м^2	а	га	км^2	Наименование
мм^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	кв. миллиметр
см^2	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	кв. сантиметр
дм^2	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	кв. дециметр
м^2	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	кв. метр
а	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	ар
га	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	гектар
км^2	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	кв. километр

Меры объема и емкости

	мл	сл	дл	л	дкл	гл	м^3	Наименование
мл (см^3)	1	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	миллилитр (куб. сантиметр)
сл	10	1	0,1	0,01	0.001	10^{-4}	10^{-5}	сантилитр
дл	100	10	1	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	децилитр
л	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	литр
дкл	10^4	1000	100	10	1	0,1	0,01	декалитр
гл	10^5	10^4	1000	100	10	1	0,1	гектолитр
м^3	10^6	10^5	10^4	1000	100	10	1	Кубический метр (кубометр, кило-литр)

Меры массы

	мг	сг	дг	г	кг	ц	т	Наименование
мг	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	10^{-8}	10^{-9}	миллиграмм
сг	10	1	0,1	0,01	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}	сантиграмм
дг	100	10	1	0,1	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}	дециграмм
г	1000	100	10	1	0,001	10^{-5}	10^{-6}	грамм
кг	10^{6}	10^{5}	10^{4}	1000	1	0,01	0,001	килограмм
ц	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	100	1	0,1	центнер
т	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	100	1	тонна

Старые русские единицы

Единицы длины

Справочные значения

1 вершок ≈ 4,44492 см

1 пядень = 4 вершка = 1 четверть (четверть аршина) = = 17,7797 см

1 аршин = 16 вершков ≈ 71,1187 см

1 сажень = 3 аршина = 48 вершков ≈ 213,36 см

1 верста = 500 сажень = 1500 аршин ≈ 1066,8 м = 1,0668 км

*Почти точные соотношения**

9 вершков = 40 см, ошибка 0,01%

3 сажени = 9 аршин = 6,4 м, ошибка 0,014%

3 версты = 3,2 км, ошибка 0,01%

Аналоги английских длин

с совпадающими значениями

1 дюйм = 2,54 см

1 фут = 12 дюймов = 30,48 см

с несовпадающими значениями

1 линия = 0,1 дюйма = 0,254 см

1 точка = 0,01 дюйма = 0,1 линии = 0,254 мм

---

* В основу «почти точных соотношений» положена гипотеза, в силу которой 9 вершков равны 40 см. Эта гипотеза позволяет привести всю русскую систему мер в соответствие с метрической. Аналогичная гипотеза может быть принята относительно долей: 9 долей равны 400 мг (см. «Единицы массы»).

Единицы площади

Справочные значения

1 кв. вершок = 19,7573 см^2

1 кв. аршин = 256 кв. вершков = 5057,87 см^2 = 0,505787 м^2

1 кв. сажень = 9 кв. аршин = 4,5521 м^2

1 кв. верста = 250000 кв. сажень = 1,138 км^2

Почти точные соотношения:

81 кв. вершков = 1600 см^2, ошибка 0,02%

9 кв. саженей = 40,96 м^2, ошибка 0,022%

9 кв. верст = 10,24 км^2, ошибка 0,09%

1 казенная десятина (тридцатка — 80 · 30 кв. саженей, сороковка — 60 · 40 кв. саженей = 2400 кв. саженей = 10925,4 м^2 = = 1,09254 га

1 хозяйственная косая (домашняя) десятина (обычно 80 · 40 кв. саженей) = 3200 кв. саженей = 14567,2 м^2 = 1,45672 га

1 хозяйственная круглая десятина (обычно 60 · 60 кв. саженей) = 3600 кв. саженей = 16388,1 м^2 = 1,63881 га

1 сотенная десятина = (100 · 100 кв. саженей) = 45522,5 м^2 = = 4,55225 га

Единицы объема (вместимости)

1 куб. вершок ≈ 87,8197 см^3

1 куб. аршин = 16^3 (4096) куб. вершков ≈ 0,35971 м^3

1 куб. сажень = 27 куб. аршин ≈ 9,7121 м^3

1 куб. дюйм ≈ 16,3871 см^3

1 куб. фут = 12^3 (= 1728) куб. дюймов ≈ 28,317 дм^3 = = 0,028317 м^3

1 куб. линия = 0,001 куб. дюйма ≈ 0,0163871 см^3 = = 16,3871 мм^3

1 казенное ведро = объему 30 фунтов воды = 30 · 409,6 см^3 = = 12,288 л

1 кружка = $\frac{1}{10}$ ведра = 1,2288 л

1 штоф = $\frac{1}{8}$ ведра = 1,5360 л

1 бочка мерная = 40 ведер = 491,52 л

1 бочка пивная = 10 ведер = 122,88 л

Единицы массы

1 доля = 44,4444 мг

Точное соотношение: 9 долей = 400 мг

1 золотник = 96 долей ≈ 4,26667 г

1 лот = 3 золотника = 12,8 г

1 фунт = 32 лота = 96 золотников = 409,6 г (не совпадает с английским)

1 пуд = 40 фунтов = 16,384 кг

Англо-американская система мер

Единицы длины

1 дюйм (in – inch) = 2,54 см

1 точка (point) = $\frac{1}{72}$ дюйма = 0,352778 мм

1 линия (line) = $\frac{1}{12}$ дюйма = 6 точек = 2,11667 мм

1 фут (ft – foot) = 12 дюймов = 30,48 см

1 ярд (yd – yard) = 3 фута = 36 дюймов = 91,44 см

1 фатом (f – fathom), морская сажень = 6 футов = 72 дюйма = = 1,8288 м

1 род (rd – rod) = 16,5 футов = 5,5 ярдов = 5,0292 м

1 фарлонг (fur – furlong) = 220 ярдов = 660 футов = = 201,168 м

1 кабельтов (cable’s length) = англ. (GB) = 100 фатомов = = 600 футов = 182,88 м

1 кабельтов (cable’s length) = амер. (US) = 120 фатомов = =720 футов = 219,456 м

1 уставная статутная миля (ml-land, statute mile) = = 8 фарлонгов = 1760 ярдов = 5280 футов = 1609,344 м

1 морская миля (INM – International Nautical Mile) = = 10 англ. кабельтовых = 6000 футов = 1828,8 м = 1,8288 км

1 уставная, статутная лига (land, statute league) = 3 уставным статутным милям = 15 840 футов = 4828,032 м = 4,828032 км

1 морская лига (nautical, sea league) = 3 морским милям = = 18 000 футов = 5,4864 км

Единицы площади

1 кв. дюйм (in^2 – square inch) = 6,4516 $см^2$

1 кв. фут (ft^2) = 144 кв. дюйма = 929,0304 $см^2$ ≈ 0,092903 $м^2$

1 кв. ярд (yd^2) = 9 кв. футов = 1296 кв. дюймов ≈ 0,836127 $м^2$

1 кв. фатом (f^2) = 4 кв. ярда ≈ 3,34451 $м^2$

1 кв. род (rd^2) = 30,25 кв. ярда ≈ 25,2929 $м^2$

1 руд (rood) = 40 кв. родов ≈ 1011,71 $м^2$ = 0,101171 га

1 акр (a – acre) = 4 руда ≈ 0,404686 га

1 кв. миля уставная, статутная (ml^2) = 640 акров = = 258,999 га = 2,58999 $км^2$

1 тауншип (township, US) = 36 кв. миль = 93,2396 $км^2$

Меры объема

1 куб. дюйм (in^3) = 16,3871 $см^3$

1 куб. фут (ft^3) = 12^3 (1728) куб. дюймов = 28316,8 $см^3$ = = 0,0283168 $м^3$

1 куб. ярд (yd^3) = 27 куб. футов = 0,764555 $м^3$

1 стек (stack) = 108 куб. футов = 4 куб. ярда = = 3,05822 $м^3$

1 лоуд (load) = 40 куб. футов (для круглого леса) = = 1,13267 $м^3$

1 лоуд (load) = 50 куб. футов (для пиломатериалов) = = 1,41584 $м^3$

1 корд (cord) малый = 126 куб. футов (для круглого леса) = 3,56792 $м^3$

1 корд (cord) большой = 128 куб. футов (для дров) = = 3,62456 $м^3$

1 стандарт (standard) = 165 куб. футов (для пиломатериалов) = 4,6723 $м^3$

1 куб. фатом (f^3) = 216 куб. футов (для круглого леса) = = 6,11644 $м^3$

1 фрахтовая тонна (fraught ton) корабельная = = 40 куб. футов = 1,13267 $м^3$ (см. 1 лоуд)

1 регисторная тонна (register ton) = 100 куб. футов = = 2,83168 $м^3$

1 род (rod) = 10 регисторных тонн = 1000 куб. футов = = 28,3168 $м^3$

Единицы массы

1 гран (grain) ≈ 0,06479891 г

1 драхма (dr – drachm, dram) = 27,34375 гран ≈ 1,771845 г

1 унция (oz – ounce) = 16 драхм = 437,5 гран ≈ 28,34952 г

1 фунт (lb – pound) = 16 унций = 16^2 (= 256) драхм = = 7000 гран ≈ 453,5924 г

1 стоун (stone) = 14 фунтов = 6,350293 кг

1 короткий квартер (short quarter) = 25 фунтов = = 11,33981 кг

1 длинный квартер (gross quarter) = 28 фунтов = = 12,70059 г

1 центал (cental) = 100 фунтов = 45,35924 кг

1 хандредвейт малый, короткий (cwt – hundredweight net, short) = 1 централ = 100 фунтов = 45,35924 кг

1 хандредвейт большой, длинный (cwt – hundredweight gross, long) = 1 квинтал (quintal) английский = 112 фунтов = = 50,8023 кг

1 квинтал (quintal) американский = 100 фунтов = 1 хандервейт короткий

1 короткая тонна (sh. tn – short, net ton) = 2000 фунтов ≈ 0,907185 т

1 длинная тонна (tn – gross, long ton) = 2240 фунтов ≈ ≈ 1,016047 т

1 длинная тонна = 1,12 коротких тонн

1 короткая тонна = 0,892857 длинных тонн

Аптекарская система

1 гран (grain) = 0,06479891 г

1 скрупул (scruple) = 20 гран = 1,29598 г

1 драхма (dr – dram) = 3 скрупула = 3,88793 г

1 аптекарская унция (oz – ounce) = 8 драхм = 480 гран ≈ ≈ 31,10348 г

1 аптекарский фунт (lb – pound) = 12 унций = 5760 гран = = 373,2417 г

Тройская система

1 гран (grain) = 0,06479891 г = 64,79891 мг

1 карат (c – carat) = 3,086 гран = 0,2 г

1 пеннивейт (dwt – pennyweight) = 3,8879346 г

1 драхма (dr – dram) = 60 гран = 3,887938 г

1 тройскаяя унция (oz – ounce) = 8 драхм = 480 гран = = 31,10348 г

1 тройский фунт (lb – pound) = 12 унций = 5760 гран = = 373,2417 г

1 майт (mite) = 1/20 грана = 0,0032400 г = 3,2400 мг

1 дойт (doit) = $\frac{1}{24}$ майта = $\frac{1}{480}$ грана = 0,135 мг

1 пириот (periot) = $\frac{1}{20}$ дойта = $\frac{1}{480}$ майта = $\frac{1}{9600}$ грана = = 0,00675 мг

1 блэнк (blank) = $\frac{1}{24}$ пириота = 0,000281 мг

Единицы вместимости для жидкостей

Английские единицы

1 драхма жидкая (fl dr – fluid drachm) = 3,551875 см^3

1 миним (minim) = 1/60 жидкой драхмы ≈ ≈ 0,0591979 см^3

1 чайная ложка (tea-spoon) = 4/3 жидких драхмы = = 4,73583 см^3

1 столовая ложка (table-spoon) = 3 чайных ложки = = 4 жидких драхмы ≈ 14,2075 см^3

1 англ. жидкая унция (fl. oz – fluid ounce) = 8 жидких драхм = 28,415 см^3

1 рюмка (wineglass) = 16 жидких драхм = 2 жидких унции = 56,830 см^3

1 джилл (gill) = 5 жидких унций = 0,142075 дм^3 = = 142,075 см^3

1 пинта (pt – pint) = 4 джилла = 20 жидких унций = = 0,56830 дм^3

1 кварта (qt – quart) = 2 пинты = 40 жидких унций = = 1,1366 дм^3

1 галлон (gal – gallon Imperial) = 8 пинт = 160 жидких унций = 4,5464 дм^3

1 баррель сырой нефти = 34,97 галлонов = 158,98 дм^3

1 баррель нефтепродуктов = 36 галлонов = 163,6704 дм^3

1 хогзхэд (hhd – hogshead) = 52,2 галлона = 237,32208 дм^3

1 бат (butt) = 105 галлонов = 477,372 дм^3

Американские единицы

1 амер. жидкая унция = 1,041 англ. жидкой унции = = 29,58002 см^3

1 джилл = 4 жидких унций = 118,3201 см^3

1 пинта = 4 джилла = 0,473280 дм^3

1 кварта = 2 пинты = 32 жидких унций = 0,946560 дм^3

1 галлон = 4 кварты = 128 жидких унций = 3,78624 дм^3

1 баррель сырой нефти = 158,98 дм^3

1 баррель нефтепродуктов = 31,5 галлонов = = 119,267 дм^3

Температура по Цельсию (°С) и Фаренгейту (°F)

$$°F = 32° + 1{,}8\ °C, \quad 0°\ (F) = -17{,}778°\ (C)$$

°C	–40	*–35*	–30	*–25*	–20	*–15*	–10	*–5*	0	*5*	10	*15*	20	*25*	30	*35*	40
°F	–40	*–31*	–22	*–13*	–4	*5*	14	*23*	32	*41*	50	*59*	68	*77*	86	*95*	104

Предметный указатель

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 3

ОБРАБОТКА ДАННЫХ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ТАБЛИЦЫ

Учебное издание

Рывкин Альберт Анатольевич
Рывкин Анатолий Залманович

МАТЕМАТИКА

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ СТАРШИХ КЛАССОВ
И ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Редактор *Е. С. Гридасова*
Младший редактор *О. А. Федорова*
Корректор *Р. К. Сапожникова*
Технический редактор *Л. Б. Чуева*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 25.08.2003. Формат 84x108 $^1/_{32}$.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,40. Тираж 10 000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».
Изд. лиц. ИД № 02795 от 11.09.2000.
105066, Москва, ул. Доброслободская, д. 5а.
Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 110-02-50
Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 928-78-26.
E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru